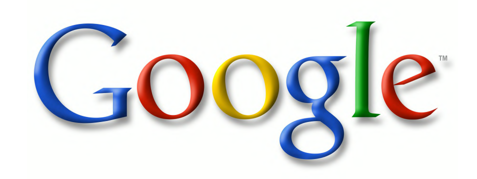
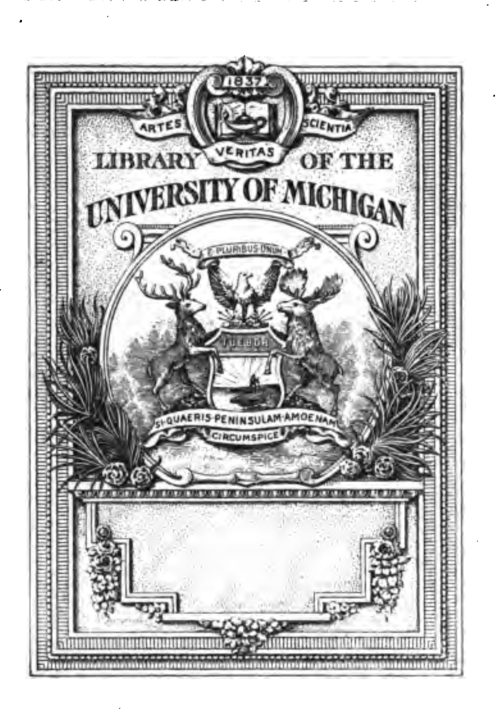



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques, Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe

3e SÉRIE

TOME TROISIÈME

Année 1889.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1889

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

DES COORDONNÉES TRIPOLAIRES

Par M. **Aug. Poulain,** à Angers.

1. — Soit ABC un triangle de référence; λ, μ, ν les distances d'un point M aux trois sommets. Ce sont ces distances, et non leurs carrés, que nous appellerons *coordonnées tripolaires* de M.

I. — *Équations de la droite et du cercle.*

2. Théorème I. — *En coordonnées tripolaires, l'équation du second degré,*

(1) $$f(\lambda, \mu, \nu) = l\lambda^2 + m\mu^2 + n\nu^2 + q = 0,$$

qui ne contient que les carrés des coordonnées et une constante, représente toujours un cercle ou une droite: un cercle, quand on a

(2) $$l + m + n \neq 0;$$

une droite, dans le cas contraire.

En effet, rapportons la ligne à des axes rectangulaires quelconques. Puisque λ est la distance de deux points A, M, donnés par leurs coordonnées, on a, en appelant X_a, Y_a les coordonnées de A,

(3) $$\lambda^2 = (X - X_a)^2 + (Y - Y_a)^2.$$

Il y a des valeurs analogues pour μ^2 et ν^2. Dès lors, en substituant dans (1), on obtient

(4) $$\varphi(X,Y) = (l+m+n)(X^2+Y^2) - 2X.\Sigma lX_a - 2Y.\Sigma lY_a + Q = 0.$$

Donc...

Nous représenterons $l + m + n$ par S', ou par Σl; et $\alpha + \beta + \gamma$ par σ.

3. Remarques. — 1° L'équation (1) est l'équation la plus générale des cercles ou des droites. Or, pour $S' \neq 0$, on peut imposer trois conditions, et, pour $S' = 0$, il en reste deux.

2° La transformation montre que la position du *centre* du cercle dépend de *l, m, n*, mais non de *q*. Il en est de même de la *direction* de la droite.

3° Dans le cas de $S' \neq 0$, $\frac{f(\lambda, \mu, \nu)}{S'}$ représente la puissance du point M par rapport au cercle. En effet, cette puissance est $\frac{\varphi(X, Y)}{S'}$; or, l'on a $\varphi(X, Y) = f(\lambda, \mu, \nu)$.

Dans le cas de $S' = 0$, $f(\lambda, \mu, \nu)$ est, pour la même raison, proportionnel à la distance δ de M à la droite.

Le théorème I et les conséquences précédentes subsistent pour les coordonnées *multipolaires;* c'est-à-dire, quand on remplace le *triangle* de référence par un *polygone* de référence. La démonstration est identique. Il en est de même du théorème II, en donnant une extension analogue aux coordonnées barycentriques.

4. Théorème II. — 1° *Quand l'équation* (1) *représente un cercle, son centre O' a ses coordonnées barycentriques proportionnelles à* l, m, n; 2° *Quand c'est une droite* (considérée comme un cercle), *il en est de même de son centre;* ou encore, *cette droite est perpendiculaire à AA' dont le pied a ses coordonnées barycentriques proportionnelles à* m *et* n.

La seconde partie n'est que l'application de la première; et celle-ci s'établit en remarquant que les coordonnées rectangulaires du centre sont, d'après l'équation (4)

$$X' = \frac{\Sigma l X_a}{S'}, \quad Y' = \frac{\Sigma l Y_a}{S'}. \tag{5}$$

5. Conséquences. — 1° De là, un moyen immédiat de déterminer géométriquement le *centre* du cercle, ou la *direction* de la droite. Si, de plus, on veut calculer les coordonnées du centre, on appliquera à *l, m, n* une formule ultérieure de transformation (21).

2° Comme on connaît d'avance les coordonnées barycentriques des points remarquables, ou des points qui se déduisent d'un point donné M, il s'ensuit *qu'on peut écrire immédiatement l'équation générale : soit, des cercles qui ont pour centre un point remarquable; soit, des droites* Δ *perpendiculaires à la droite* AM_0 *joignant* A *à un point remarquable.* Pour ces droites Δ, les coefficients directeurs sont

$$-(\beta_0 + \gamma_0), \quad \beta_0, \quad \gamma_0.$$

3° Ce qui précède montre que les coordonnées barycentriques s'introduisent nécessairement dans l'étude des tripolaires; nous constatons aussi, dès maintenant, que la théorie de la droite peut toujours se faire, en la regardant comme un cercle limite.

6. — Nous venons de voir que l'équation d'une droite Δ donne sa direction. Voici comment on peut obtenir certains points :

1° Coupons par la médiatrice; c'est-à-dire par le lieu pour lequel $\mu^2 = \nu^2$. L'équation donnée devient, à cause de $m + n = -l$,

$$l\lambda^2 + (m + n)\mu^2 + q = 0, \quad \text{ou} \quad (6) \quad \lambda^2 - \mu^2 = \frac{-q}{l}.$$

Or, on sait que ce lieu est une perpendiculaire à AB. On a facilement les distances λ, μ de son pied, à A et B, en remplaçant, dans l'équation, une de ces distances, par sa valeur tirée de la relation

$$(7) \qquad \lambda + \mu = c,$$

qui s'applique aux trois régions de la droite indéfinie qui passe par les points A, B; pourvu qu'on affecte λ et μ de signes convenables. On a donc un point de Δ par l'intersection de perpendiculaires à deux côtés de ABC.

2° Voici un second procédé. Coupons par le cercle

$$l\lambda^2 + m\mu^2 = 0,$$

qui a son centre sur AB, et dont ont on détermine les intersections avec AB, en se servant encore de la relation (7). La droite donnée est rencontrée, par ce cercle, sur un autre cercle de centre C :

$$n\nu^2 + q = 0.$$

II. — *Puissance du point.*

7. Théorème III. — *Quand un cercle de centre* O′ *et de rayon* R′ *est représenté par l'équation* (1), *la constante est donnée par la formule*

(8) $$\frac{q}{S'} = \overline{OO'}^2 - R^2 - R'^2.$$

En effet, appliquons un corollaire précédent **(3)**, pour calculer la puissance de O par rapport au cercle O′; nous avons

$$\overline{OO'}^2 - R'^2 = \frac{f(R, R, R)}{S'} = \frac{R^2S' + q}{S'} = R^2 + \frac{q}{S'}.$$

8. Cas particuliers. — 1° Quand le cercle passe par O, $OO' = R'$ et dès lors

(9) $$q = -R^2S'.$$

On le vérifie facilement, en substituant les coordonnées de O.

2° La relation $q = 0$ caractérise les cercles orthogonaux au cercle O. En effet, dans ce cas, on a

$$\overline{OO'}^2 = R^2 + R'^2.$$

3° Par là même, si le cercle dégénère en droite, $q = 0$ caractérise les droites orthogonales au cercle O, c'est-à-dire ses diamètres. Il est facile de le vérifier comme dans 1°.

4° Pour le cercle circonscrit, on a $OO' = 0$, $R = R'$; d'où

$$q = -2R^2S';$$

et dès lors l'équation est, d'après **(4)**,

(10) $$\Sigma\lambda^2 \sin 2A - 2R^2\Sigma \sin 2A = 0.$$

Mais, comme on a

(11) $$2S = R^2\Sigma \sin 2A,$$

l'équation devient

(12) $$\Sigma\lambda^2 \sin 2A = 4S,$$

ou l'équation équivalente

(13) $$\Sigma\lambda^2\, a \cos A = abc.$$

5° Plus généralement, pour tout cercle concentrique au cercle circonscrit, on a $OO' = 0$; d'où

$$q = (-R^2 - R'^2)S'.$$

L'équation du cercle est donc d'après **(4)** :

$$\Sigma\lambda^2 \sin 2A - (R^2 + R'^2)\Sigma \sin 2A = 0,$$

ou

$$(14)\qquad \Sigma\lambda^2 \sin 2A = \frac{R^2 + R'^2}{R^2} \cdot 2S.$$

6° Le théorème III, ses trois premières conséquences et le théorème IV subsistent en coordonnées multipolaires si le polygone de référence est inscriptible dans un cercle. On est averti de cette restriction par la présence de R. Les conséquences **4** et **5** exigent, de plus, qu'on remplace les angles A, B, C par les angles 1/2 A', ... sous lesquels les côtés du polygone sont vus de son centre O.

9. Théorème IV. — *L'expression* $-\frac{\Sigma\alpha_0\lambda_0^2}{\sigma_0}$ (où l'on pose $\sigma_0 = \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0$) *représente la puissance du point* M_0 *par rapport au cercle circonscrit.*

En effet, $\Sigma\alpha_0\lambda^2 = 0$ représente un cercle de centre M_0 et orthogonal au cercle O (**8**, 2°). Comme $-\frac{\Sigma\alpha_0\lambda_0^2}{\sigma_0}$ est, au signe près, la puissance de son centre, c'est le carré du rayon, ou R'^2. Mais, puisque les deux cercles sont orthogonaux, $R'^2 = \overline{OM}_0^2 - R^2$, c'est-à-dire égale la puissance de M_0 par rapport au cercle O.

10. Corollaire. — On a toujours, entre les diverses coordonnées d'un même point, l'égalité

$$(15)\qquad \Sigma\lambda\alpha^2 = \frac{\Sigma a^2\beta\gamma}{\sigma} = \frac{-\Sigma\alpha^2 bc \cos A + \sigma\Sigma\alpha bc \cos A}{\sigma}.$$

Car M. Plamenewsky a donné (J. E. 1888, p. 102) la formule barycentrique (*)

$$(16)\qquad \overline{OM}^2 - R^2 = -\frac{\Sigma a^2\beta\gamma}{\sigma^2},$$

et le numérateur de cette expression se transforme identiquement dans le suivant (**).

(*) On peut y arriver rapidement, en partant de l'équation du cercle circonscrit $\Sigma a^2\beta\gamma = 0$. La puissance de $M(\alpha,\beta,\gamma)$ égale le premier membre multiplié par la constante $-\frac{1}{\sigma^2}$. On en trouve la valeur, en amenant M au milieu de $BC\left(0, \frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$, σ restant constant pendant le mouvement.

(**) Pour cela on prouve que

$$2\beta\gamma = -(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) + \sigma(\beta + \gamma - \alpha),$$

ce qui se fait en partant de $\alpha + \beta + \gamma = \sigma$. On multiplie les deux

11. — Étant donné un point $M_0,(\alpha_0,\ldots)$, cherchons l'équation de ce point considéré comme cercle évanouissant (nous dirons plus rapidement :. l'équation évanouisssante du point). C'est

(17) $$\Sigma\alpha_0\lambda^2 - \Sigma\alpha_0\lambda_0^2 = 0.$$

Car l'équation représente un cercle et elle est vérifiée par les coordonnées du centre.

12. Corollaire. — De là nous pouvons tirer sous quatre formes différentes l'expression de la distance d de deux points M, M_0. La première formule est

(18) $$d^2 = \frac{\Sigma\alpha_0\lambda^2 - \Sigma\alpha_0\lambda_0^2}{\sigma_0} = \frac{\Sigma\alpha_0(\lambda^2 - \lambda_0^2)}{\sigma_0}.$$

Elle s'établit en égalant deux expressions de la puissance de M par rapport au cercle évanouissant M_0. Elle suppose qu'on connaît à la fois, pour un des points M_0, ses coordonnées barycentriques et tripolaires. Les formules de transformation que nous donnerons plus tard permettent de supposer qu'on a cette connaissance simultanée (voir, pour l'une d'elles **13**, 2°).

La seconde formule ne diffère de la première que par l'échange des points M et M_0. On a

(19) $$d^2 = \frac{\Sigma\alpha\lambda_0^2 - \Sigma\alpha\lambda^2}{\sigma} = \frac{\Sigma\alpha(\lambda_0^2 - \lambda^2)}{\sigma}.$$

Ces formules sont vraies pour les coordonnées multipolaires. Mais l'expression (20) que nous allons tirer de (16) suppose que le polygone de référence est inscriptible et qu'il n'y a dans la dernière fraction que trois quantités α β, γ. Ce sont celles qu'on obtient en détachant du polygone tel triangle partiel de référence qu'on voudra, à l'aide de côtés et de diagonales.

Les deux autres formules s'obtiennent en remplaçant $\Sigma\alpha_0\lambda_0^2$ ou $\Sigma\alpha\lambda^2$ par leurs valeurs tirées de (15). La formule (19) devient ainsi

(20) $$d^2 = \frac{\Sigma\alpha\lambda_0^2}{\sigma} - \frac{\Sigma a^2\beta\gamma}{\sigma^2}.$$

---

membres par α, β ou γ et, des trois équations ainsi obtenues, on tire $\beta\gamma$

Le numérateur peut encore s'écrire

$$2S(-\Sigma\alpha^2 \operatorname{cotg} A + \sigma\Sigma\alpha \operatorname{cotg} A),$$

à cause de l'égalité $bc \cos A = 2S \operatorname{cotg} A.$

13. Remarques. — 1° Ces formules permettent de passer d'un système tripolaire à un autre. Les valeurs de d sont les nouvelles coordonnées.

2° La formule (20) doit être considérée comme donnant d en coordonnées barycentriques. En effet, on peut remplacer $\lambda_0, \ldots$ par leurs valeurs au moyen d'une formule de transformation que voici (*) :

$$\sigma^2\lambda^2 = c^2\beta^2 + b^2\gamma^2 + 2bc\beta\gamma \cos A. \tag{21}$$

Si donc on veut avoir d sous une forme simple, les coordonnées tripolaires et barycentriques doivent se trouver réunies dans la même formule.

3° Si d est donné, la relation (18) représente un cercle de centre M_0 et de rayon d. Il en est de même de (20) en coordonnées barycentriques.

4° On voit qu'on peut calculer la distance de deux points remarquables quelconques; et cela à l'aide d'une formule où les trois coordonnées sont traitées symétriquement.

14. Application. — Cherchons MO. La formule (19) donne, en simplifiant comme au n° **8** (4°),

$$\overline{MO}^2 = \frac{\Sigma\lambda^2 \sin 2A - R^2\Sigma \sin 2A}{\Sigma \sin 2A}$$

$$= \frac{R^2}{2S}\Sigma\lambda^2 \sin 2A - R^2. \tag{22}$$

Les formules (19) et (20) donnent

$$\overline{MO}^2 = \frac{R^2\Sigma\alpha - \Sigma\alpha\lambda^2}{\sigma} = R^2 - \frac{\Sigma\alpha\lambda^2}{\sigma}, \tag{23}$$

et, par suite,

$$\overline{MO}^2 = R^2 - \frac{\Sigma a^2\beta\gamma}{\sigma^2}. \tag{24}$$

(*) On peut y arriver par un calcul analogue à celui que donne M. Plamenewski pour une formule voisine (J. E. 1888, p. 102). — On obtient directement la formule (20) en partant de l'élégante équation baricentrique des cercles, donnée par M. de Longchamps (J. S. 1886, p. 57);

$$\sigma\Sigma u\alpha - \Sigma a^2\beta\gamma = 0,$$

qui devient l'équation évanouissante de M_0, pour $u = \lambda_0^2$, $v = \mu_0^2$ $w = \nu_0^2$. D'ailleurs, la puissance de M égale le premier membre multiplié par $\frac{1}{\sigma^2}$ (car, pour M venant en A, il se réduit à $u\sigma^2$). Pour obtenir la ormule (20) il n'y a plus qu'à calculer la puissance de M par rapport, au cercle M_0.

15. — *Connaissant l'équation d'un cercle, on peut calculer son rayon.* Car, de (8) on tire

$$R'^2 = -\frac{q}{S'} + (\overline{OO'}^2 - R^2). \quad (25)$$

Or, nous venons de donner trois expressions de MO; on peut les appliquer à OO'. En prenant la dernière, nous avons R'^2, en fonction des coefficients :

$$R'^2 = \frac{-q}{S'} - \frac{\Sigma a^2mn}{S'^2}; \quad (26)$$

ce qui permet d'introduire R' dans l'expression de la puissance de M (**3**) :

$$MO'^2 - R'^2 = \frac{f(\lambda,\mu,\nu)}{S'} = \frac{R'f(\lambda,\mu,\nu)}{\sqrt{-qS' - \Sigma a^2mn}}. \quad (27)$$

16. — Une transformation, ci-dessus indiquée (**10**), montre que, sous le radical, l'expression $-\Sigma a^2mn$, que nous représenterons par t, peut être remplacée par

$$\Sigma l^2bc \cos A - S'\Sigma lbc \cos A, \quad (28)$$

qu'on peut écrire

$$2S(\Sigma l^2 \operatorname{cotg} A - S'\Sigma l \operatorname{cotg} A). \quad (29)$$

DEUXIÈME NOTE D'ALGÈBRE

Par M. **Lucien Lévy**.

Dane le numéro de décembre 1888, nous avons montré que l'équation de toute courbe $\psi(x, y) = 0$ qui passe par les points communs à deux courbes $f = 0$, $\varphi = 0$ peut être mise sous la forme

$$\psi \equiv Af + BF = 0$$

A et B étant des polynômes entiers en x et y. La démonstration suppose les points simples, n'ayant entre eux aucune relation de position particulière, et les courbes aussi absolument indépendantes entre elles. Or les points d'intersection des deux courbes sont bien en général quelconques : par exemple les points d'intersection de deux coniques, les points communs

à deux droites, à une droite et à une conique, etc. Mais cela n'a pas toujours lieu : ainsi, deux cubiques qui passent par huit points ont toujours un neuvième point commun qui est déterminé quand les huit premiers le sont. Donc, le nombre de conditions à exprimer pour qu'une cubique passe par les points communs à deux autres cubiques est huit, et non neuf. Notre démonstration ne conviendrait pas à ce cas. En voici une de M. Picard qui convient toujours.

Soit p le degré de $f = 0$,
q celui de $F = 0$,

Supposons en outre que les axes de coordonnées ne soient parallèles à aucune direction asymptotique de $f = 0$ ou de $\varphi = 0$, ni à aucune droite joignant deux des points d'intersection de ces courbes.

D'abord en tirant y^p de l'équation $f = 0$, on peut toujours mettre ψ sous la forme

$$\psi \equiv \varphi + Mf + NF,$$

φ étant un polynôme du degré $p + q - 1$ au plus en y. Il suffit d'étudier la forme d'un polynôme φ de degré $p + q - 1$ en y s'annulant aux points communs à $f = 0$ et à $F = 0$.

Cela posé, soit $R(x)$ le résultant des deux polynômes en y, f et F. On peut toujours déterminer de deux polynômes : $u(x,y)$, de degré $q - 1$ en y ; et $v(x,y)$, de degré $p - 1$ en y, tels qu'on ait

$$\text{(A)} \qquad R(x)\varphi(x,y) \equiv uf + vF.$$

Soit maintenant x_1, y_1 un point commun aux deux courbes $f = 0$, $F = 0$. Je dis que $u(x_1, y_1) = 0$. En effet, les deux polynômes $f(x_1, y)$, $F(x_1, y)$ ayant un diviseur commun $y - y_1$, $R(x_1) = 0$, c'est-à-dire que $R(x)$ est divisible par $x - x_1$. D'autre part

$$\varphi(x, y) = (x - x_1)\varphi'_{x_1}(x_1, y_1) + (y - y_1)\varphi'_{y_1}(x_1, y_1) + \dots$$

Donc le premier membre ne contient pas de termes du premier degré en $x - x_1$; il en est de même du second. Or, posons

$$u = u(x_1, y_1) + (x - x_1)u'_{x_1}(x_1, y_1) + (y - y_1)u'_{y_1}(x_1, y_1) + \dots$$
$$v = v(x_1, y_1) + (x - x_1)v'_{x_1}(x_1, y) + \dots$$
$$f = (x - x_1)f'_{x_1} + (y - y_1)f'_{y_1} + \dots$$
$$F = (x - x_1)F'_{x_1} + (y - y_1)F'_{y_1} + \dots$$

Les termes du premier degré dans $uf + v\mathrm{F}$ doivent disparaître, donc

$$u(x_1, y_1) \times f'_{x_1} + v(x_1, y_1) \times \mathrm{F}'_{x_1} = 0,$$
$$u(x_1, y_1) \times f'_{y_1} + v(x_1, y_1) \times \mathrm{F}'_{y_1} = 0;$$

comme le déterminant de ces deux équations n'est pas nul, puisque le point x_1, y_1 est simple sur chaque courbe et que ces courbes ne sont pas tangentes, il en résulte

$$u(x_1, y_1) = 0, \qquad v(x_1, y_1) = 0,$$

ce que nous avions supposé.

Faisons alors $x = x_1$ dans l'identité (A), elle devient

$$0 = u(x_1, y)f(x_1, y) + v(x_1, y)\mathrm{F}(x_1, y).$$

La courbe $\mathrm{F}(x_1, y) = 0$ est coupée par la droite $x = x_1$ en q points, d'ordonnées

$$\left\{\begin{array}{l} y = y_1, \\ y = y_2, \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ y = y_q; \end{array}\right.$$

et, comme $f(x_1, y_1) = 0$, on ne peut avoir, à cause du choix des axes, $f(x_1, y_2) = 0$. On a donc

$$\begin{array}{l} u(x_1, y_1) = 0, \\ u(x_1, y_2) = 0, \\ u(x_1, y_3) = 0, \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ u(x_1, y_q) = 0, \end{array}$$

c'est-à-dire que le polynôme de degré $q - 1$ en y, $u(x_1, y)$, s'annule pour q valeurs d'y : il est donc identiquement nul et $u(x, y)$ est divisible par $x - x_1$. De même, $v(x, y)$ est divisible par $x - x_1$, et l'on peut simplifier l'identité (A) en divisant ses deux membres par $x - x_1$. Après toutes les simplifications analogues, il restera

$$\varphi(x, y) \equiv \mathrm{A}f + \mathrm{B.F.}$$

C. Q. F. D.

Nota. — Ceux de nos lecteurs que la question intéresse, la trouveront traitée, pour le cas des points multiples, dans un remarquable mémoire de Nöther (t. VI des *Mathematische Annalen*), reproduit d'ailleurs dans les Leçons de Clebsch sur la Géométrie (t. II de l'édition française).

SUR LA CONVERGENCE DES FONCTIONS FACTORIELLES

Par M. **G. de Longchamps.**

Nous nous proposons, dans cette note, d'établir le criterium connu, relatif à la convergence d'une fonction factorielle; celle-ci étant constituée par un nombre infini de facteurs. Si nous ne nous trompons, quelques inexactitudes se sont glissées dans la démonstration qu'on donne ordinairement (*), à ce sujet, et il nous paraît nécessaire de distinguer le cas où les facteurs considérés sont plus petits que l'unité, de celui où ils sont, au contraire, supérieurs à l'unité.

Nous établirons d'abord un lemme nécessaire à la démonstration que nous avons en vue.

1. Lemme. — *Si* K *est un nombre positif, plus petit que l'unité, on a*

(A) $$-L(1-K) = K + \frac{\theta}{2}\cdot\frac{K^2}{1-K};$$

et

(B) $$L(1+K) = K - \theta'\frac{K^2}{2};$$

θ, θ' *désignant des quantités comprises entre zéro et l'unité*

(*) Voyez: Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 409. La formule

$$L(1+K) = K - \varepsilon\frac{K^2}{2}, \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

qui sert de base à la démonstration, n'a pas lieu pour des valeurs de K, suffisamment petites et *négatives*; mais seulement pour des valeurs *positives* de K.

En effet, en explicitant le signe de K, dans la formule (A), on a

$$-L(1-K) = K + \varepsilon\frac{K^2}{2}.$$

Or cette relation est en contradiction avec la formule classique

$$-L(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdots \qquad (x > 0)$$

de laquelle il résulte

$$-L(1-x) > x + \frac{x^2}{2} > x + \varepsilon\frac{x^2}{2}.$$

1° La formule

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots \qquad (0 < x < 1)$$

prouve que l'on a

$$L(1+x) = x - \frac{\theta'}{2}x^2 \qquad (0 < \theta' < 1).$$

2° Si l'on considère maintenant le développement de $-L(1-x)$

$$-L(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots;$$

La suite

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

est plus petite que

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1-x}.$$

On a donc

$$-L(1-x) = x + \frac{\theta}{2} \cdot \frac{x^2}{1-x}. \qquad 0 < \theta < 1)$$

2. Définition. — Imaginons que le terme général u_n, d'une série, se présente sous la forme d'un produit de facteurs; de telle sorte que nous ayons

$$u_n = \theta_1\theta_2\theta_3 \ldots \theta_n.$$

A cette occasion, on peut se demander si ce terme tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment; ou si, dans d'autres cas, il tend vers une limite finie K; ou, enfin, s'il croît au delà de toute limite. C'est ainsi qu'on peut être amené, à propos des séries, à se poser la question de la convergence et celle de la divergence des fonctions factorielles. Nous examinerons d'abord le cas où les facteurs θ sont tous compris entre zéro et l'unité et nous poserons $\theta_n = 1 - \alpha_n$; α_n désignant un nombre compris entre zéro et l'unité.

3. Théorème. — *Soit la factorielle*

$$U_\alpha = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2) \ldots (1-\alpha_n) \ldots,$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots$ *désignent des nombres positifs. inférieurs à l'unité; et soit*

$$V_h = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2) \ldots (1-\alpha_h).$$

1° V_h tend vers zéro, pour $h = \infty$, quand la série

(α) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots,$

est divergente ;

2° Au contraire, elle tend vers une limite finie, différente de zéro, quand cette série est convergente.

On a

$$V_n = (1 - \alpha_1) \ldots (1 - \alpha_n),$$

et

$$V_{n+p} = (1 - \alpha_1) \ldots (1 - \alpha_n) \ldots (1 - \alpha_{n+p});$$

par suite,

$$LV_{n+p} = L^0V_n + L(1 - L_n) + \ldots + L^0(1 - \alpha_{n+p}).$$

Posons

$$-\theta_{n,p} = L^0(1 - \alpha_n) + \ldots + L(1 - \alpha_{n+});$$

nous avons, alors

(M) $$LV_{n+p} = LV_n - \theta_{n,p}$$

Mais, d'après la formule (A),

$$-L(1 - \alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} + \frac{\theta_1}{2}\frac{\alpha_{n+1}^2}{1 - \alpha_{n+1}},$$

$$-L(1 - \alpha_{n+2}) = \alpha_{n+2} + \frac{\theta_2}{2}\frac{\alpha_{n+2}^2}{1 - \alpha_{n+2}}$$

. . . .

$$-L(1 - \alpha_{n+p}) = \alpha_{n+p} + \frac{\theta_p}{2}\frac{\alpha_{n+p}^2}{1 - \alpha_{n+p}}.$$

Ajoutons, il vient,

(1) $$\theta_{n,p} = (\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} \ldots + \alpha_{n+p}) + \left(\frac{\theta_1}{2}\frac{\alpha_{n+1}^2}{1 - \alpha_{n+1}} + \ldots + \frac{\theta_p}{2}\frac{\alpha_{n+p}^2}{1 - \alpha_{n+p}}\right).$$

Considérons maintenant la série

(α) $\alpha_1, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots \alpha_{n+p} \ldots$

et désignons par S_h la somme des h premiers termes; la première parenthèse de (1) représente $S_{n+p} - S_n$. Si la série (α) est divergente

$$S_{n+p} - S_n,$$

augmente indéfiniment avec p; par suite $\theta_{n,p}$, composée de deux parties positives dont l'une, au moins, tend vers l'infini, tend vers $+\infty$, pour $p = +\infty$.

D'après cela, la formule (M) prouve que

$$\text{Lim}\,(\text{LV}_{+np}) = -\infty\text{, pour } p = \infty,$$

on a donc

$$\text{Lim}\,(\text{V}_{n+p}) = \text{U} = 0.$$

Si nous supposons maintenant que (α) soit une série convergente, $S_{n+p} - S_n$ tend vers zéro; quand n et p augmentent successivement et indéfiniment.

D'ailleurs, les termes de la suite

$$\frac{\theta_1}{2}\,\frac{\alpha_{n+1}^2}{1-\alpha^{1+n}} + \frac{\theta_2}{2}\,\frac{\alpha_{n+2}^2}{1-\alpha_{n+2}} + \dots$$

sont, respectivement, plus faibles que les termes correspondants de la suite convergente

$$\alpha_{n+1},\quad \alpha_{n+2},\dots$$

puisqu'ils sont infiniment petits, par rapport à ces derniers. D'après cette remarque, l'égalité (1) donne

$$\text{Lim}\,\theta_{n,p} = 0,\ (\text{pour } n = \infty,\ p = \infty).$$

L'égalité (M) prouve que

$$\text{L}\,\frac{\text{V}_{n+p}}{\text{V}_n}$$

a pour limite zéro, quand n et p croissent indéfiniment. Ceci établit la convergence de U; et prouve, en même temps, que V n'a pas pour limite zéro. Mais il reste à éclaircir ce point

Posons

$$\varepsilon_{n,p} = (1-\alpha_{n+1})\dots(1-\alpha_{n+p})$$

Nous avons alors

$$(\mu)\qquad \text{V}_{n+p} = \text{V}_n\varepsilon_{n,p}$$

et, pour des valeurs de n et de p aussi grandes que nous voudrons le prendre, nous avons prouvé que

$$\text{L}\,.\,\varepsilon_{n,p}$$

état infiniment petit; par suite $\varepsilon_{n,p}$ diffère de l'unité d'un infiniment petit.

Cela posé, je dis que V_h n'a pas pour limite zéro, quand h croît indéfiniment.

En effet, après avoir donné à n, dans l'égalité (μ), une valeur déterminée, on pourrait faire croître p, autant que l'on voudrait. Alors, V_{n+p} deviendrait aussi petit que l'on voudrait, tandis que le second membre conserverait une valeur finie; $\varepsilon_{n,p}$ étant un nombre variable, mais voisin de l'unité. Cela implique contradiction.

On voit, par un raisonnement semblable, que V_h, pour $h = \infty$, ne peut pas être infini.

4. — Il nous reste à examiner le cas de factorielles, dont les facteurs sont plus grands que l'unité ; leur convergence (ou leur divergence) résulte du théorème suivant.

Théorème. — *Soit la factorielle*

$$U_\beta = (1 + \beta_1)(1 + \beta_2) \dots (1 + \beta_n) \dots,$$

dans laquelle $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n, \dots$ *désignent des nombres tous positifs.*

Si l'on pose

$$W_h = (1 + \beta_1)(1 + \beta_2) \dots (1 + \beta_h)$$

W_h *croît indéfiniment, avec* h, *si la série*

$$(\beta) \qquad \beta_1, \beta_2, \dots \beta_n, \dots$$

est divergente; et l'on peut écrire $U = \infty$.

Au contraire; si la série (β) *est convergente,* W_h *tend vers une limite finie, différente de zéro.*

La démonstration de ce théorème est analogue à la précédente; il faut seulement s'appuyer sur l'identité

$$L(1 + K) = K - \frac{\theta}{2} K^2.$$

5. Application. — Soit, par exemple, le produit (*)

$$U = (1 + q)(1 + q^2) \dots (1 + q^n) \dots \qquad (q < 1)$$

La série

$$q, q^2, \dots q^n \dots$$

est convergente ; la factorielle considérée est donc convergente.

6. Remarque. — Nous avons supposé, dans ce qui précède, que α_n et β_n avaient pour limite zéro, quand n croissait au delà de toute limite. Dans le cas contraire, il est évident :

1° Que U_α a pour limite zéro; 2° que U_β croît au delà de toute limite.

(*) Catalan, *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 170.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE

Par M. **Emile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 242).

COURBES REMARQUABLES

83. — Parmi les courbes remarquables, associées au triangle, se trouvent un certain nombre de cercles dont les propriétés sont très connues. Nous rappellerons ici, simplement, leurs équations barycentriques.

Cercle circonscrit de centre O *et de rayon* R:

$$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0,$$

ou en coordonnées normales

$$yz \sin A + zx \sin B + xy \sin C = 0.$$

Cercle inscrit de centre I *et de rayon* r :

$$\sqrt{(p-a)\alpha} + \sqrt{(p-b)\beta} + \sqrt{(p-c)\gamma} = 0,$$

ou $$\Sigma(p-a)^2\alpha^2 - 2\Sigma(p-a)(p-b)\alpha\beta = 0.$$

Cercles ex-inscrits de centres I_a, I_b, I_c *et de rayons* r_a, r_b, r_c :
Pour le cercle I_a on a :

$$\sqrt{p\alpha} + \sqrt{(p-b)\beta} + \sqrt{(p-c)\gamma} = 0.$$

On trouve des formules analogues pour les cercles I_b, I_c.

Cercle des neuf points de centre O_9 *et de rayon* R_9 (*):

$$\Sigma\alpha.\Sigma bc \cos A.\alpha - 2\Sigma a^2\beta\gamma = 0,$$

ou $$\Sigma bc \cos A.\alpha^2 - \Sigma c^2\alpha\beta = 0,$$

et l'on a : $$R_9 = \frac{1}{2}R.$$

Cercle polaire conjugué. — Il a pour centre l'orthocentre H et passe par les points d'intersection du cercle des neuf points et du cercle circonscrit. Ce cercle n'est réel que si le triangle est obtusangle.

Son équation est :

$$\Sigma(-a^2 + b^2 + c^2)\alpha^2 = 0, \qquad \text{ou } \Sigma\alpha^2 \operatorname{cotg} A = 0,$$

(*) Ce cercle est quelquefois appelé *cercle de Feuerbach* ou *cercle d'Euler*; nous conserverons la dénomination de *cercle des neuf points* qui est classique.

ou encore, en coordonnées normales,

$$\Sigma x^2 \sin 2A = 0.$$

Son rayon ρ a pour expression:

$$\rho^2 = -4R^2 \cos A \cos A \cos C.$$

84. Cercle anticomplémentaire du cercle polaire conjugué. — Il a pour centre l'orthocentre du triangle anticomplémentaire de ABC; comme le cercle polaire conjugué, il n'est réel que si le triangle ABC est obtusangle. Il a pour équation :

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - (a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta) = 0$$

et son rayon ρ' est donné par la formule

$$\rho'^2 = -16R^2 \cos A \cos B \cos C = 16R^2 - 2m^2 = 4\rho^2.$$

Il a été étudié par M. de Longchamps (*); voici ses principales propriétés :

1° Il est orthogonal aux cercles décrits des milieux des côtés du triangle, comme centres, avec les médianes correspondantes pour rayon;

2° Si on considère sur un des côtés BC du triangle ABC deux points isotomiques I, I', le cercle anticomplémentaire du cercle conjugué est orthogonal au cercle décrit de I, comme centre, avec AI' pour rayon.

Il possède d'autres propriétés analogues à celles dont jouit le cercle polaire conjugué.

A suivre.

CORRESPONDANCE

Note sur la question 257 (**), proposée par M. Hermite.

Cette *question*, proposée par l'illustre géomètre, est comprise dans le théorème suivant, énoncé dans le *Cours d'Analyse* de M. Catalan, et dont la démonstration est fort simple :

(*) Voir G. de Longchamps. — *Sur un nouveau cercle remarquable du plan d'un triangle* (J. E. mars 1886 et numéros suivants).

Voyez aussi l'ouvrage de Sir John Casey : *A Sequel to Euclid*, firth édition, p. 246 (Longchamps' circle).

(**) Voyez plus loin (p. 22) une solution de cette question.

a, b *étant des nombres entiers :*

1° Si $\frac{N}{D}$ *est la fraction irréductible équivalente*

à
$$\frac{1.2.3 \ldots (a+b-1)}{1.2.3 \ldots a \times 1.2 \ldots b} = c,$$
D *divise* a *et* b.

2° *Si* a *et* b *sont premiers entre eux,* c *est un nombre entier.*

Cette remarque s'applique à la question 258 proposée dans le présent numéro.

Voici d'ailleurs la lettre adressée, à ce propos, par M. Hermite, à M. Catalan.

« Paris, 19 décembre 1888.

» Mon cher Monsieur Catalan,

» Je m'empresse de donner communication de votre lettre à M. de Longchamps, afin qu'il la mette à profit et fasse connaître à ses lecteurs les résultats auxquels vous êtes parvenu. Excusez-moi, je vous en prie, de n'avoir pas consulté votre cours d'Analyse ; j'ai voulu, en répondant à une demande bienveillante de M. de Longchamps, lui envoyer des questions d'exercice pour ses lecteurs, et j'ai pris ce qui m'est tombé sous la main.

» En vous renouvelant, mon cher Monsieur Catalan, l'assurance de mes sentiments bien sincèrement dévoués.

« Ch. HERMITE. »

EXERCICES ÉCRITS (*)

1. — Soient AB, CD deux diamètres rectangulaires d'un cercle Δ, de centre O.

Autour de O, on fait tourner deux rayons rectangulaires OP,

(*) Un résumé de la solution que comporte cet exercice paraîtra dans le numéro prochain. Les lecteurs abonnés à ce journal peuvent m'envoyer leurs solutions; elles seront insérées ou signalées et je retournerai à leurs auteurs, les rédactions qui me seront adressées, après les avoir annotées. G. L.

OQ et l'on projette leurs extrémités : en P', Q', sur AB ; en P'', Q'', sur CD.

1° La circonférence Δ' décrit sur P'Q', comme diamètre, rencontre PQ en I, I' ; trouver le lieu décrit par chacun de ces points ;

2° Les circonférences Δ', Δ'' décrites sur P'Q' et sur P''Q'', comme diamètres, se coupent en deux points dont on demande le lieu géométrique ;

3° Enfin, on demande le lieu décrit par le centre de similitude externe des circonférences Δ', Δ''.

QUESTIONS ÉNONCÉES (*)

1. — Lim de
$$\frac{L.(1+n)}{L.n},$$
quand n augmente indéfiniment.

On observe que
$$\frac{L(1+n)}{Ln} = \frac{L\left(1+\frac{1}{n}\right)}{L.n} + 1\text{ ; etc.}$$

2. — Valeur de
$$y = \frac{\operatorname{Log}(1+x) - x}{\sin x}$$
pour $x = 0$.

On écrit y sous la forme
$$\frac{\operatorname{Log}(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{\sin x}{x}};$$
la valeur cherchée est $\operatorname{Log}\frac{e}{a}$,
A étant la base du système de logarithmes considéré.

3. — Quelle est, pour $n = 0$, la valeur de
$$y = \frac{x^n - 1}{e^n - 1}.$$

(*) Ces énoncés sont empruntés au Recueil des *questions d'examen de l'École polytechnique*, Concours de 1888 ; publié par la librairie Croville-Morant, 20, rue de la Sorbonne.

On a vu, dans la recherche de la dérivée de a_x, que

$$\text{Lim}\ \frac{a^h - 1}{h} = La, \qquad \text{pour } h = 0.$$

En divisant, haut et bas, par n, les deux termes de y, on voit ainsi, sans recourir à la règle de l'Hôpital, que la valeur cherchée est Lx.

4. — La série

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdots$$

est-elle convergente.

On peut prouver la convergence de cette série en utilisant la règle de Duhamel, comme on proposait de le faire. Mais il est plus simple d'observer que

$$n^{\frac{3}{2}} u_n = 1\,;$$

la convergence résulte alors d'un théorème connu (*Supplément*, p. 29.)

5. — Dérivée de

$$y = \text{arc sin } 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

On trouve $$y' = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

On compare alors y, avec $Y = \textit{arc}\ \text{sin}\ x$. (Voyez *C. M. S*, tome I, p. 321).

6. — Dérivée de

$$y = \text{arc sin}(3x - 4x^3).$$

La valeur de la dérivée est $\dfrac{3}{\sqrt{1 - x^2}}$ (V. id.; p. 323.)

QUESTION 257

Solution par Ignacio Beyens, capitaine du Génie, à Cadix.

Démontrer que

$$\frac{m(m - 1)(m - 2)\ldots(m - n + 2)}{n!}$$

est un nombre entier, lorsque m *est un multiple de* n.

(Ch. Hermite.)

Nous avons d'abord

$$C_m^n = \frac{m(m - 1)(m - 2)\ldots(m - n + 1)}{n!} = \textit{nombre entier.}$$

$$C_m^{n-1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)}{(n-1)!} = \textit{nombre entier}.$$

Or m étant multiple de n, $\frac{m-n}{n}$ est aussi un *nombre entier*.

Par suite

$$C_m^n - \frac{m-n}{n}C_m^{n-1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)}{n!}$$
$$-\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{n!}(m-n)$$
$$= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)}{n!}(m-n+1-(m-n))$$
$$= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)}{n!} = \textit{entier},$$

en supposant $m = \mathfrak{M}(n)$.

QUESTIONS PROPOSÉES

258. — On sait que les coefficients de la puissance m du binôme sont divisibles par m, à l'exception du premier et du dernier, lorsque m est un nombre premier.

1° On propose d'étendre cette proposition en montrant que l'expression

$$\text{(A)} \qquad \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!},$$

est, divisible par $\frac{m}{\delta}$, δ désignant le plus grand commun diviseur de m et n.

2° Soit ε le plus grand commun diviseur des nombres $m+1$ et n; on demande d'établir que le nombre entier (A) est divisible par

$$\frac{m-n+1}{\varepsilon}.$$

(Ch. Hermite.)

259. — Démontrer que, pour $x > 1$, on a la relation

$$\log x > \frac{2(x-1)}{x+1},$$

le logarithme étant pris dans le système Népérien.

(Ch. Hermite.)

260. — Prouver que, pour toutes les valeurs réelles et positives de la variable x, l'expression

$$\frac{x^a - x^{1-a}}{x-1},$$

dans laquelle a désigne une quantité comprise entre zéro et l'unité, peut être représentée par

$$(2a-1)\theta,$$

en supposant

$$0 < \theta < 1.$$ *(Ch. Hermite.)*

261. — Soit une circonférence Δ; on prend, dans ce cercle, un diamètre fixe AB. Par un point M, mobile sur Δ, on trace une droite rencontrant AB en P et telle que PMB soit un triangle isoscèle:

1° Démontrer que le lieu des centres des cercles circonscrits à PMB est une Strophoïde;

2° Trouver le lieu décrit par le pôle de MP et construire ce lieu qui est une cubique unicursale.

3° Trouver l'enveloppe de la droite PM. *(G. L.)*

Le Directeur Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 27340-1-9.

SUR LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR
ALGÉBRIQUE

Par M. **Édouard Lucas.**

Nous nous proposons de donner l'expression des restes obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes $F(x)$ et $G(x)$, ordonnés suivant les exposants décroissants de la variable x. Ces résultats ont été obtenus, en partie seulement, par Lemonnier, dans son *Mémoire sur l'élimination* (*). Nous les appliquerons ensuite aux théorèmes de Sturm, de Sylvester et de Borchardt.

1. — Considérons d'abord deux polynômes $F(x)$ et $G(x)$, de degrés m et $m - 1$:

$$F(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m,$$
$$G(x) = b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \dots + b_{m-1};$$

supposons que la suite des restes soit complète; désignons-les par V_1, V_2, ... V_{m-1} et leurs premiers coefficients par v_1, v_2, ..., v_{m-1}. Posons

$$\lambda_0 = b_0, \qquad \lambda_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & F \\ 0 & b_0 & G \\ b_0 & b_1 & xG \end{vmatrix};$$

puis

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & xF \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & F \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & G \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & xG \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & x^2G \end{vmatrix},$$

et ainsi de suite, en augmentant chaque fois de deux lignes et de deux colonnes; de telle sorte que λ_{m-1} est le résultant de F et G, sous la forme donnée par la méthode dialytique de Sylvester.

(*) *Annales de l'École normale*, *2e série*, t. VII, 1878.

Cela posé, on a

$$(-1)^p \mu_p V_p = D_p,$$

les nombres μ étant tous positifs et déterminés par l'une des formules

$$\mu_{2i} = \left(\frac{\lambda_1\lambda_3 \ldots \lambda_{2i-1}}{\lambda_0\lambda_2 \ldots \lambda_{2i-2}}\right)^2, \qquad \mu_{2i+1} = \left(\frac{\lambda_0\lambda_2 \ldots \lambda_{2i}}{\lambda_1\lambda_3 \ldots \lambda_{2i-1}}\right)^2.$$

En effet, on a les identités

$$F = Q_1 G + V_1,$$
$$G = Q_2 V_1 + V_2,$$
$$V_1 = Q_3 V_2 + V_3,$$
$$\cdots\cdots$$

d'où l'on tire : inversement,

$$V_1 = F - Q_1 G,$$
$$-V_2 = Q_2 F - S_2 G,$$
$$V_3 = R_3 F - S_3 G,$$
$$\cdots\cdots$$

et, en général,

(1) $$(-1)^{p-1} V_p = R_p F - S_p G,$$

en désignant par S_p et R_p les deux termes de la réduite

$$\frac{S_p}{R_p} = Q_1 + \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{1}{Q_3 + \cfrac{\cdots}{\cdots + \cfrac{1}{Q_p}}}}.$$

Ainsi R_p et S_p sont des polynômes en x, de degrés $(p-1)$ et p, dont les premiers coefficients sont les premiers coefficients des produits

$$Q_2Q_3 \ldots Q_p, \qquad Q_1Q_2Q_3 \ldots Q_p;$$

c'est-à-dire $b_0 : V_{p-1}$ et $a_0 : V_{p-1}$, puisque le premier coefficient de Q_p est $V_{p-2} : V_{p-1}$.

L'identité (1) détermine le polynôme V_p. En d'autres termes, il ne peut exister deux polynômes de degré $m-1-p$, au plus, tel que le premier vérifie l'identité (1) et le second l'identité

$$(-1)^{p-1} V'_p = R'_p F - S'_p G,$$

R_p et R'_p étant de degré $p - 1$. En effet, on en déduirait

$$(-1)^{p-1}[V_pR'_p - V'_pR_p] = G[R_pS'_p - R'_pS_p],$$

et le polynôme du premier membre aurait un degré inférieur à celui du second; par conséquent, le coefficient de G est identiquement nul, et les coefficients de V_p et de V'_p sont proportionnels.

Mais si l'on développe le déterminant D_p suivant les éléments de la dernière colonne, on trouve un polynôme de degré $m - 1 - p$, de la forme $R_pF - S_pG$. On peut donc poser

$$(-1)^p\mu_pV_p = D_p,$$

μ_p étant une constante que l'on détermine en égalant les coefficients de $x^{p-1}F$. Ainsi

$$v_p = \frac{\lambda_p}{\mu_p}, \qquad \mu_p\mu_{p-1} = \lambda^2_{p-1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On obtiendra d'ailleurs l'expression de μ_pR_p sous forme de déterminant en remplaçant, dans D_p, les polynômes F et G par 1 et 0; de même pour μ_pS_p. *(A suivre).*

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE

Par M. **Emile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 18).

---

85. Cercle de Brocard. — Le cercle de Brocard a pour diamètre la droite KO, il passe par les points de Brocard et par les sommets du premier triangle de Brocard; son équation est :

$$\frac{a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{\alpha}{a^2}+\frac{\beta}{b^2}+\frac{\gamma}{c^2}\right) - a^2b\gamma - b^2c\alpha\beta$$
$$- c^2a\beta = 0,$$

ou

$$\Sigma b^2c^2\alpha^2 - \Sigma a^4\beta\gamma = 0,$$

ou encore

$$(x^2+y^2+z^2)\sin\omega - [xy\sin(C-\omega) + yz\sin(A-\omega)$$
$$+ zx\sin(B-\omega)] = 0.$$

ω désignant l'angle de Brocard.

Tous les géomètres qui s'occupent du triangle ont rencontré ce cercle et en ont indiqué de nouvelles propriétés (*). Elles sont trop nombreuses pour que nous essayons de mentionner même les principales; nous préférons renvoyer le lecteur aux mémoires originaux (**).

86. Cercle de Tucker (T), — Ces cercles signalés pour la première fois par M. Lemoine (***) ont été retrouvés par M. R. Tucker qui ignorait les travaux antérieurs sur ce sujet (****) : ils sont susceptibles de plusieurs définitions.

1° Si un cercle A'B'C' est homothétique avec ABC par rapport au point K de Lemoine, les côtés des triangles se coupent en six points D, D', E, E', F, F' situés sur une même circonférence appelée *cercle de Tucker*.

2° Ces mêmes points résultent de l'intersection des côtés

(*) M. Brocard avait appelé ce cercle : *Cercle des sept points*, depuis le terme de *Cercle de Brocard* proposé par M. Neuberg a prévalu ; il est seul employé.

(**) Le nombre des mémoires où il est question du cercle de Brocard est considérable, il nous est donc impossible de les signaler tous, d'autant plus qu'il y a fort peu de mémoires sur le triangle qui ne donnent pas de nouvelles propriétés du cercle de Brocard.

Nous ne mentionnerons ici que ceux qui renferment une étude complète de ce cercle.

Voir : H. Brocard. — *Etude d'un nouveau cercle du plan du triangle* (A. F. Alger 1881 p. 138-159). Ce travail et les notes présentées par M. Lemoine (A. F. Lyon et Lille) ont été le point de départ des grands développements qu'à prises la Géométrie du triangle.

A. Morel. — *Etude sur le cercle de Brocard* (J. E. 1883, p. 10, 33, 62, 97 169, 195).

J. C. Simmons. — Companion to the weekly problem papers (1888. *An introduction to the recent Geometry of the triangle*, p. 99, 184).

(***) Lemoine. A. F. Lyon 1873, *Mathesis*, t. II, 1882. — 1884, p. 201, 204.

(****) R. Tucker. — Q. J. n° 77, p. 57, 1883. *On a group of circles*. On peut encore consulter sur les cercles de Tucker :

J. Neuberg. — *Équation des cercles de Tucker* (J. S. 1886), M. 1881. *Sur le centre des médianes antiparallèles.*

T. C. Simmons. — *Companion to weekly problem papers*, p. 127-137.

R. F. Davis. — *The recent Geometry of the triangle.* (Association for the Improvement of Geometrical Teaching, 1888.)

E. Vigarié. — *Propriétés générales des cercles de Tucker* (J. E. 1886).

J. Casey. — *A Treatise on conic sections*, 1885, p. 107. — *A Sequel to Euclid*, 1886, p. 178-185.

H. Taylor. — *Relations of the intersections of a circle with a triangle* P L. vol. XV, 1884.

de ABC avec les côtés d'un triangle A″B″C″ dont les sommets sont sur les symédianes et dont les côtés sont parallèles aux côtés du triangle orthique;

3° Ce sont aussi les sommets de deux triangles DEF, D'E'F semblables à ABC et dont les côtés font un même angle φ avec ceux de ABC;

$$\widehat{FEA} = \widehat{DFB} = \widehat{EDC} = \widehat{E'F'A} = \widehat{BF'D} = \widehat{CD'E'} = \varphi.$$

L'équation générale des cercles de Tucker est:

$$\Sigma \frac{\beta\gamma}{b^2c^2} - \lambda\Sigma\alpha\Sigma \left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right) \alpha = 0.$$

Les valeurs de λ qui correspondent aux trois modes de génération que nous venons d'indiquer sont:

$$1^\circ \quad \lambda_1 = \frac{AA'}{(a^2 + b^2 + c^2).AK}, \qquad 2^\circ \quad \lambda_2 = \frac{2AA'''}{(a^2 + b^2 + c^2).AK},$$

$$3^\circ \quad \lambda_3 = \frac{1}{2S(\cotg \varphi + \cotg \omega)}.$$

Le lieu des centres des cercles de Tucker est une droite: c'est le diamètre du cercle de Brocard.

L'enveloppe des cercles de Tucker est une ellipse inscrite au triangle, touchant les côtés aux pieds des symédianes, elle a pour foyer les points de Brocard : c'est l'*ellipse de Brocard*. Les principaux cas particuliers des cercles de Tucker sont le premier et le second cercle de Lemoine et le cercle de Taylor.

87. Premier cercle de Lemoine. — Il coupe les côtés de ABC, aux points d'intersection de ces derniers avec les parallèles aux côtés menées par le point de Lemoine (*), c'est le cas des cercles de Tucker, lorsque

$$\lambda = \frac{1}{m^2};$$

(*) Ce cercle découvert par M. Lemoine qui l'avait indiqué comme cas particulier des cercles de Tucker, a été retrouvé par M. R. Tucker, qui l'avait appelé *The Triplicate ratio circle*, à cause de cette propriété : Les segments interceptés par le cercle sur les côtés du triangle sont proportionnels au cube des côtés. En abrégé on désigne ce cercle en Angleterre par les lettres « T. R. ».

M. Tucker a étudié le premier cercle de Lemoine et en a donné de nouvelles propriétés.

Voir R. Tucker. *The triplicate ratio circle* (P. L. XIV, 1883, p. 316-321). *The Triplicate ratio circle* (A. J., XIX, n° 76, 342-348.)

il a pour équation :

$$\Sigma \frac{\beta^2}{b^2c^2} - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{m^4} \Sigma \frac{b^2+c^2}{a^2} x = 0.$$

88. Deuxième cercle de Lemoine. — Les antiparallèles aux côtés de ABC, menées par le point de Lemoine K rencontrent les côtés en six points du deuxième cercle de Lemoine (*). Son centre est K; il rentre, comme cas particulier dans les cercles de Tucker, en supposant

$$\lambda = \frac{2}{m^2}.$$

Il a pour équation :

$$\Sigma \frac{\beta^2}{b^2c^2} - 2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{m^4} \Sigma \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2} x = 0.$$

(A suivre.)

VARIÉTÉS

QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE

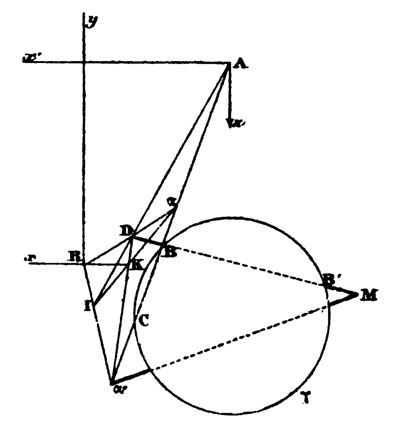
(*Suite*, voir p. 271, année 1888.)

4. Le problème du canal. — Voici dans quelles conditions pourrait se présenter le problème, très simple, que nous abordons.

Un bassin circulaire γ de grande étendue (ou une nappe d'eau naturelle affectant sensiblement, au moins dans la partie la plus voisine de la mer, la forme circulaire) doit être relié à la mer par un canal aboutissant, sur la plage, en un point déterminé A. Il s'agit donc, dans ces conditions, le point A pouvant être, dans certains cas, très éloigné de γ, de jalonner la droite allant, de A, au centre du bassin en question.

(*) Ce cercle signalé aussi par M. Lemoine (*loc. cit.* et *Nouvelle Correspondance*, t. III, p. 188) est aussi appelé *cosine circle*, M. Casey *(A Sequel to Euclid)*, attribue la découverte de ce cercle à M' Cay. Nous adopterons la dénomination de *Deuxième cercle de Lemoine.*

Mener des tangentes, de A, à la périphérie de γ; puis, la bissectrice de ces semi-droites, ne constitue pas une solution acceptable; si, comme nous le supposons, A n'est pas dans le voisinage du bassin. Voici comment, dans cette hypothèse, on peut déterminer le jalonnement de la droite demandée.



Par A (*), traçons une droite qui rencontre la circonférence γ en B, C et prenons sur BC deux points isotomiques quelconques α, α'. En α', fixons un cordeau; puis, déterminons, sur ce cordeau, le point M, isotomique de α'. Prenons encore, sur un cordeau fixé en M, par exemple sur MB, le point D, isotomique de M, par rapport à BB'.

Ayant jalonné AD, nous déterminerons, sur cette droite, au moyen de la fausse équerre, un point I, tel que $I\alpha'C = AD\alpha$.

Il résulte de cette construction, que les points α, α', D, I appartiennent à un cercle γ', concentrique à γ. Traçons $I\alpha$, $D\alpha'$ qui se coupent en K; $O\alpha$, $\alpha'T$ qui concourent en R : RK est la polaire de A, par rapport à γ'. Pour achever la construction, on tracera successivement Ry, perpendiculaire à Rx; Ax', à Ry; Az, à Ax'. Az est la droite demandée.

5. REMARQUE. — Ce tracé nécessite des constructions relativement compliquées; pour ce motif, il est utile de rechercher les vérifications qu'il comporte. Au point de vue pratique, la détermination de $\alpha'I$, dans la construction précédente, constitue une opération délicate; aussi doit-on, avant de jalonner RK, s'assurer que le point I a été convenablement déterminé. A cet effet, on fixera un cordeau divisé, en I, dans la direction IM; puis, en M, dans la direction MI; et l'on vérifiera

(*) Le lecteur supposera que, en réalité, A est beaucoup plus éloigné de γ que ne le représente la figure.

ainsi que les points de rencontre de IM avec γ sont deux points isotomiques par rapport à IM.

Nous ferons encore observer que la direction de ABC, ainsi que l'un des points α ou α', sont arbitraires; on choisira donc AB et α, de façon que les jalonnements dont on a besoin s'exécutent dans des conditions pratiques convenables.

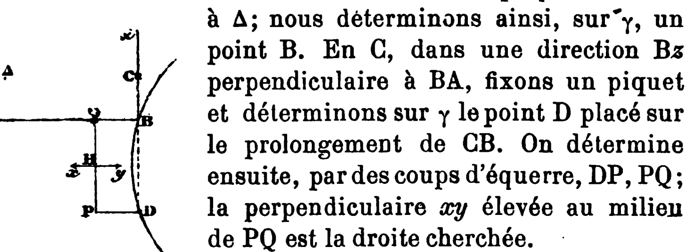
Mais le tracé d'une droite (canal, chemin de fer, etc.) aboutissant à un bassin circulaire de grandes dimensions, peut se présenter dans des conditions autres que celles que nous avons imaginées au paragraphe précédent; nous allons examiner rapidement ces conditions nouvelles, en nous posant les deux problèmes suivants :

1° Un bassin circulaire γ et une droite Δ étant donnés, jalonner, sur le terrain, la plus courte distance entre Δ et la circonférence γ.

2° Deux bassins circulaires γ, γ' étant donnés, déterminer le tracé de la droite qui représente la plus courte distance de leurs périphéries.

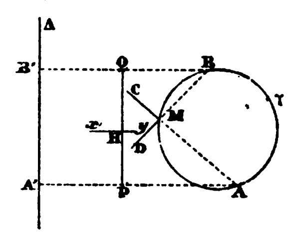
Dans l'un et l'autre cas, on doit supposer que les distances en question peuvent être relativement considérables. De là résultent, au point de vue pratique, certaines difficultés; et, des solutions nombreuses qui se présentent à l'esprit pour traiter ces problèmes élémentaires, quelques-unes seulement peuvent, *pratiquement*, convenir aux tracés que l'on peut effectuer sur le terrain.

6. PROBLÈME I. — Jalonnons une droite AB perpendiculaire à Δ; nous déterminons ainsi, sur γ, un point B. En C, dans une direction Bz perpendiculaire à BA, fixons un piquet et déterminons sur γ le point D placé sur le prolongement de CB. On détermine ensuite, par des coups d'équerre, DP, PQ; la perpendiculaire xy élevée au milieu de PQ est la droite cherchée.



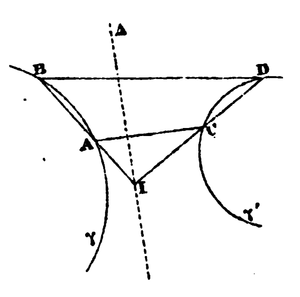
Voici une seconde construction qui pourrait être employée dans le cas où le diamètre du bassin est assez petit pour que l'on puisse, d'un point pris sur sa circonférence γ, viser le point diamétralement opposé.

Sur γ, en un point quelconque M, on place un jalon; puis en C, D l'on fixe deux piquets, de façon que l'angle CMD soit droit. On peut alors déterminer les points A, B où les droites CM, DM rencontrent γ. On abaisse les perpendiculaires AA', BB' sur Δ; PQ étant une perpendiculaire commune aux parallèles AA', BB', la perpendiculaire xy élevée à PQ, en son point milieu H, est la droite demandée.



7. Problème II. — Soient deux bassins; circulaires γ, γ' on veu jalonner la ligne descentres ω, ω'.

On observera d'abord que ce problème est ramené au précédent, si l'on peut déterminer l'axe radical Δ' des cercles γ, γ'. Pour obtenir Δ, nous indiquerons deux procédés (*).



1° Admettons d'abord que γ et γ' soient assez rapprochées pour que l'on puisse, d'un point de γ, viser les différents points de γ'.

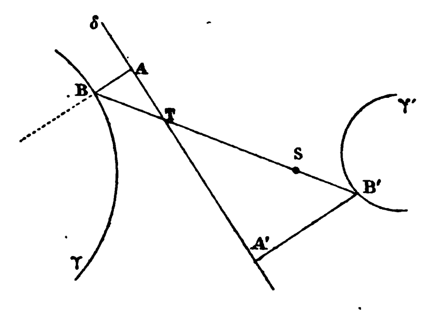
Prenons, sur γ, deux points arbitraires A, B; et, sur γ', un point C, quelconque, lui aussi. Ayant relevé avec la fausse équerre l'angle obtus BAC, on déterminera, sur γ', un point D d'où l'on aperçoive BC sous un angle α supplémentaire de BAC; cet angle α, comme nous l'avons remarqué à diverses reprises, est donné d'ailleurs par la fausse équerre. Les droites BA, CD se coupent en un point I appartenant à l'axe radical Δ. On cherchera, de même, un second point de cette droite et celle-ci se trouvera déterminée.

2° Supposons maintenant que γ, γ' soient tellement éloignées, qu'on ne puisse, comme nous l'avons dit tout à l'heure, viser, de D, le point B.

(*) On pourrait, bien entendu, pour résoudre le problème actuel, imaginer beaucoup d'autres solutions; par exemple, après avoir jalonné les tangentes communes intérieures on obtient l'axe radical en prenant les milieux de ces droites; mais un pareil tracé n'est pas pratique.

La construction précédente est alors en défaut; celle que nous allons indiquer est plus longue, mais elle offre l'avantage d'être générale et de convenir à tous les cas possibles.

Traçons, arbitrairement, une droite δ extérieure aux cercles γ, γ'. On peut, comme nous l'avons indiqué au paragraphe précédent, obtenir les droites AB, A'B' qui, perpendiculaires sur δ, passent respectivement par les centres de γ, γ'. D'après cela, BB' passe par le centre de similitude interne S, des cercles γ, γ'. Connaissant un point de la ligne des centres (*), on obtient le tracé que nous avions en vue, en utilisant la construction indiquée plus haut.



Mais il se présente ici, dans l'ordre pratique, une difficulté que nous devons signaler.

Les points B, B' sont, par hypothèse, assez éloignés pour qu'on ne puisse, de l'un, apercevoir le second. Dans ces conditions, il s'agit de jalonner BB'.

Ce problème nous a précédemment occupé, quand nous avons cherché (*Géométrie de la règle*, § § **32, 33**) à prolonger une droite dont les extrémités sont séparées par un obstacle; ou sont invisibles, pour un motif quelconque. Dans le cas présent, au lieu d'avoir recours aux constructions auxquelles nous venons de faire allusion, il est plus simple d'observer que BB' rencontre δ en un point T tel qne

$$AT = \frac{AB.AA'}{AB + A'B'}.$$

On relèvera, avec le ruban divisé, les longueurs AB, A'B', AA'; et, le point T étant connu, on pourra jalonner BT.

(A suivre.)

(*) Pour avoir le point S, il faudra, bien entendu, tracer une seconde droite BB'. Il est plus simple de partager BB' dans le rapport des rayons de γ, γ', si l'on connaît ce rapport.

NOTE SUR DEUX FAISCEAUX DE TROIS DROITES

ET SOLUTION DE LA QUESTION 251,

Par M. **E. Lemoine**, ancien élève de l'École polytechnique.

Soient ABC, $A_1B_1C_1$ *deux triangles. Démontrer que le lieu des points* M *et le lieu des points* M_1, *tels que* AM, BM, CM *soient respectivement parallèles à* A_1M_1, B_1M_1, C_1M_1, *sont des coniques.*

Le lieu de M *est une conique circonscrite à* ABC. *Le lieu de* M_1 *est une autre conique circonscrite à* $A_1B_1C_1$. *Examiner les cas particuliers où les côtés de* $A_1B_1C_1$ *sont parallèles aux hauteurs, aux bissectrices, aux médianes, aux symédianes, aux antiparallèles du triangle* ABC. (E. Lemoine.)

Il est clair que si, laissant ABC invariable, je remplace $A_1B_1C_1$ par un triangle $A_2B_2C_2$ homothétique à $A_1B_1C_1$ mais quelconque, le lieu de M ne changera pas. Il est également évident que je n'ai qu'à m'occuper de trouver l'équation du lieu de M, parce que le lieu de M_1 se déduit du lieu de M, par de simples changements de lettres.

Imaginons tous les triangles CA'B' de sommet C et homothétiques à $C_1A_1B_1$, et traçons AA', BB' : le lieu du point M d'intersection de ces deux droites est précisément le lieu demandé.

Prenons CB pour axe des x, CA pour axe des y; si $y = \lambda x$; $y = \mu x$; $y = mx + p$ sont les équations des trois droites CA', CB', A'B' et que l'on pose CA = b, CB = a.

L'équation de AA' sera :

$$y - b = \frac{\lambda p - b\lambda + mb}{p}\, x$$

Celle de BB' sera :

$$y = \frac{\mu p}{p - a\mu + am}\,(x - a)$$

En éliminant p entre ces deux équations, on trouve, pour le lieu de M :

(1) $b(\lambda - m)(y + a\mu - \mu x)x - a(\mu - m)(b + \lambda x - y)y = 0.$

C'est une conique circonscrite à ABC.

On aurait pu, très simplement aussi, prendre CB′ pour axe de x, CA′ pour axe de y; appelant alors x_1, y_1, x_2, y_2 les coordonnées de A et de B. Posant $CA = pb'$, $CB = pa'$:

L'équation de AA′ est :

$$y - y_1 = \frac{y_1 - pb'}{x_1}(x - x_1).$$

Celle de BB′ est :

$$y - y_2 = \frac{y_2}{x_2 - pa'}(x - x_2).$$

En éliminant p, il vient

$$\frac{xy_1 - yx_1}{x - x_1} = \frac{b'}{a'}\frac{yx_2 - xy_2}{y - y_2} \tag{2}$$

pour l'équation du lieu de M.

Cette équation ne contient a' et b' que par leur rapport, comme cela pouvait être prévu.

On peut discuter, soit l'équation (1), soit l'équation (2); mais il est préférable de chercher d'autres formes plus symétriques.

Prenons ABC dour triangle de référence.

Les équations de B_1C_1, C_1A_1, A_1B sont :

$$A_{1a}\alpha + B_{1a}\beta + C_{1a}\gamma = 0,$$
$$A_{1b}\alpha + B_{1b}\beta + C_{1b}\gamma = 0,$$
$$A_{1c}\alpha + B_{1c}\beta + C_{1c}\gamma = 0.$$

Par A, B, C, menons des parallèles B′C′, C′A′, A′B′, à B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Les équations de B′C′, C′A′, A′B′ seront :

$$\lambda\beta + \gamma = 0, \qquad \mu\gamma + \alpha = 0, \qquad \nu\alpha + \beta = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger l'écriture :

$$\lambda = \frac{aB_{1a} - bA_{1a}}{aC_{1a} - cA_{1a}},$$
$$\mu = \frac{bC_{1b} - cB_{1b}}{bA_{1b} - aB_{1b}},$$
$$\nu = \frac{cA_{1c} - aC_{1c}}{cB_{1c} - bC_{1c}}.$$

Si l'on appelle ξ, η, ζ les coordonnées de M, et que l'on exprime que les parallèles à AM, BM, CM menées respectivement par A′, B′, C′ se coupant en un même point, on trouvera une équation, du troisième degré en ξ, η, ζ, qui est divisible par $a\xi + b\eta + c\zeta = 0$, puisque la droite de l'infini appartient

évidemment au lieu de **M**. Toutes réductions faites, on trouve, comme équation de ce lieu:

$$(3)\quad \eta\zeta(b - \lambda c)(b\mu\nu - \mu a + c) + \xi\zeta(c - \mu a)(c\lambda\nu - \nu b + a) + \xi\eta(a - \nu b)(a\lambda\mu - \lambda c + b) = 0.$$

On peut encore prendre CA, CB pour axe des y et des x, et en appelant x_a, y_a; x_b, y_b; x_c, y_c les coordonnées de A_1, B_1, C_1, on trouve pour équation du lieu :

$$(4)\quad a(x_a - x_c)y^2 + [a(y_c - y_a) + b(x_b - x_c)]xy + b(y_c - y_b)x^2 + ab(x_c x_a)y + ab(y_b - y_c)x = 0.$$

Si l'on appelle alors l, m, n les coefficients angulaires $\frac{y_b - y_c}{x_b - x_c}$, $\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a}$, $\frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$ de B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 cette équation peut s'écrire

$$(5)\quad a(l - n)y^2 + [b(m - n) - am(l - n)]xy - bl(m - n)x^2 - ab(l - n)y + abl(m - n)x = 0.$$

Si l'on suppose les trois points A_1, B_1, C_1 en ligne droite, c'est-à-dire $l = m = n$, la forme (5) devient illusoire.

Prenons alors la forme (4) que nous allons d'abord transformer avant de supposer A_1, B_1, C_1 en ligne droite.

Je ne change pas le lieu de M en transportant le triangle $C_1A_1B_1$ parallèlement à lui-même en $CA'_1B'_1$.

Les nouvelles coordonnées des points occupés par C_1, A_1, B_1, après ce transport, sont respectivement :

$$0, 0; \qquad x'_a, y'_a; \qquad x'_b, y'_b,$$

et l'on a

$$x_a - x_c = x'_a; \quad y_a - y_c = y'_a; \quad x_b - x_c = x'_b; \quad y_b - y_c = y'_b.$$

L'équation devient donc dans ce cas :

$$ay^2 + xy\left(b\frac{x'_b}{x'_a} - a\frac{y'_a}{x'_a}\right) - bx^2\frac{y'_b}{x'_a} - aby + abz\frac{y'_b}{x'_a} = 0.$$

Mais $\frac{y'_a}{x'_a} = l$; en posant $\frac{x'_b}{x'_a} = \rho$, et en introduisant l'hypothèse que les trois points o, A_1, B_1 sont en ligne droite, le rapport $\frac{y'_b}{x'_a} = \frac{\left(\frac{y'_b}{x'_b}\right)}{\left(\frac{x'_a}{x'_b}\right)}$ devient $\frac{l}{\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \rho l.$

L'équation du lieu de M est donc alors :

(6) $ay^2 + xy(b\rho - al) - bx^2\rho l - aby + abx\rho l = 0.$

Étudions maintenant l'équation (3).

Soient α, β, γ, les coordonnées d'un point P.

Le lieu de M sera la conique

$$\sum \frac{\alpha}{\xi}(b\beta + c\gamma) = 0,$$

lorsque B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 seront parallèles à PA, PB, PC.

Si P_a, P_b, P_c sont les points $-\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha, -\beta, \gamma$; $\alpha, \beta, -\gamma$ algébriquement adjoints à P, et que B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 soient respectivement parallèles à P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b, le lieu de M sera la conique :

$$\sum \frac{\alpha}{\xi}(b\beta - c\gamma)(b\beta + c\gamma - a\alpha) = 0.$$

A. — Les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont les antiparallèles à BC, CA, AB.

Le lieu de M est l'hyperbole équilatère

$$\Sigma\eta\zeta(b^2 - c^2)\cos A = 0,$$

qui a pour centre le point

$$\left(\frac{b^2 - c^2}{a}\right)^2 \cos A, \text{ etc.} \quad \text{ou} \quad \sin^2(B - C)\cos A, \text{ etc.}$$

Elle passe par le point de Lemoine (voir *Bulletin de la Société mathématique*, t. XIV, p. 118).

Le lieu de M_1 est l'hyperbole équilatère qui passe par le centre du cercle inscrit à $A_1B_1C_1$ et par le point $p_1 - a_1$, $p_1 - b_1$, $p_1 - c_1$, le triangle $A_1B_1C_1$ étant le triangle de référence.

B. — Si B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont parallèles aux bissectrices extérieures de ABC, le lieu de M a pour équation

$$\Sigma\eta\zeta(b - c)(p - a) = 0$$

c'est une hyperbole équilatère qui passe par le centre du cercle inscrit, par le point $p - a$, $p - b$, $p - c$ et qui a pour centre le point $(b - c)^2\dfrac{p - a}{a}$, etc. On a, dans l'équation (3),

$$\lambda = \mu = \nu = 1.$$

Le lieu de M_1 est alors l'hyperbole équilatère circonscrite à $A_1B_1C_1$ et passant par le point de *Lemoine* de $A_1B_1C_1$.

C. — Si les côtés de B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont respectivement perpendiculaires à BC, CA, AB :

1° Le lieu de M est le cercle circonscrit à ABC ; 2° le lieu de M_1 est le cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$.

D. — Si B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont respectivement parallèles aux symédianes partant de A, de B et de C le lieu de M est l'ellipse :

$$\Sigma a\eta\zeta(b^2 + c^2) = 0,$$

qui a pour centre le point $\dfrac{b^2 + c^2}{a}$, etc.

E. — Si B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont respectivement parallèles aux bissectrices intérieures de A, de B et de C, le lieu de M est l'ellipse $\Sigma\eta\zeta(b + c) = 0$ qui a pour centre le centre de gravité du périmètre de ABC.

F. — Si B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont respectivement parallèles aux médianes partant de A, de B, de C, le lieu de M sera l'ellipse minima circonscrite à ABC et le lieu de M_1 l'ellipse minima circonscrite à $A_1B_1C_1$.

G. — Si les points A_1, B_1, C_1 sont les points algébriquement adjoints au centre de gravité du périmètre de ABC, le lieu de M est l'hyperbole : $\Sigma\eta\zeta(b^2 - c^2) = 0$ qui passe par le centre du cercle inscrit, par le point : $\dfrac{1}{a^2}, \dfrac{1}{b^2}, \dfrac{1}{c^2}$ et par le point : tg A, tg B, tg C du triangle ABC ; c'est encore la même courbe, si T étant le point de *Tarry* : $\dfrac{1}{a(b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2)}$, etc., B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont parallèles à AT, BT, CT. On a, alors, dans l'équation (3),

$$\lambda = \frac{a + b}{a + c}\frac{b}{c}; \qquad \mu = \frac{b + c}{b + a}\frac{c}{a}; \qquad \nu = \frac{c + a}{c + b}\frac{a}{b}.$$

H. — ω_1 et ω_2 étant les points direct et rétrograde de *Brocard*, $\dfrac{b}{c}, \dfrac{c}{a}, \dfrac{a}{b}$; $\dfrac{c}{b}, \dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{a}$, si B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont respectivement parallèles à $A\omega_1$, $B\omega_1$, $C\omega_1$ ou à $A\omega_2$, $B\omega_2$, $C\omega_2$, le lieu de M est représenté par les ellipses :

$$\frac{b^2 + a^2}{a\xi} + \frac{c^2 + b^2}{b\eta} + \frac{a^2 + c^2}{c\zeta} = 0,$$

ou

$$\frac{c^2 + a^2}{a\xi} + \frac{a^2 + b^2}{b\eta} + \frac{b^2 + c^2}{c\zeta} = 0.$$

I. — Si, R étant le point de *Steiner* : $\frac{1}{a(b^2 - c^2)}$, etc., B_1C_1. C_1A_1, A_1B_1 sont respectivement parallèles à AR, BR, CR, le lieu de M est l'hyperbole de *Kiepert* : $\sum \frac{b^2 - c^2}{a\xi} = 0$.

J. — Si B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont parallèles aux lignes qui joignent A, B, C au point : $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{b^3}$, $\frac{1}{c^3}$ ou au point : $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ le lieu de M est une ellipse représentée par : $\sum \frac{c^2 + b^2}{a\xi} = 0$, dans le premier cas ; et par : $\sum \frac{c + b}{a\xi} = 0$, dans le second.

Observons que étant donnés deux triangles, il y a six lieux de M et six lieux de M_1 qui correspondent aux six manières de joindre, deux à deux, les sommets des deux triangles ; mettons les lettres A, B, C,, à des sommets quelconques du premier triangle et A_1, B_1, C_1 à des sommets quelconques du second.

AM, BM, CM peuvent être respectivement parallèles 1° à A_1M_1, B_1M_1, C_1M_1 ; 2° à C_1M_1, B_1M_1, A_1M_1 ; 3° à B_1M_1, C_1M_1, A_1M_1 ; 4° à A_1M_1, C_1M_1, B_1M_1 ; 5° à C_1M_1, A_1M_1, B_1M_1 ; 6° à B_1M_1, A_1M_1, C_1M_1.

On pourra chercher, non sans intérêt peut-être, les relations que les six coniques ont entre elles.

Le lieu du point M et du point M_1 tels que MA, MB, MC sient respectivement parallèles : soit à M_1B, M_1C, M_1A, soit à M_1C, M_1A, M_1B, est la conique de Steiner : $\frac{1}{a\xi} + \frac{1}{b\eta} + \frac{1}{c\zeta} = 0$.

(A suivre).

BIBLIOGRAPHIE

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année l'**Annuaire du Bureau des Longitudes** pour 1889 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes : *Sur les quatre sessions de l'Association géodésique internationale à Paris, Ber-*

lin, Nice et Salzbourg; par H. Faye. — *Sur la mesure des masses en Astronomie;* par F. Tisserand. — *Une expédition au massif du mont Blanc;* par J. Janssen. — *Une ascension au pic de Ténériffe;* par Bouquet de la Grye. — *Discours prononcé à l'inauguration de la statue d'Ampère à Lyon;* par A. Cornu. — *Revue des principaux travaux du Bureau des Longitudes en 1888;* par le Secrétaire. In-18 de IX-830 pages, avec 2 cartes magnétiques (Paris, Gauthier-Villars et Fils. 1 fr. 50 c.)

Recueil de Problèmes de Géométrie analytique, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales, par Ch. Brisse, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Condorcet, répétiteur à l'Ecole Polytechnique.

Solutions des problèmes donnés aux concours d'admission à l'Ecole Centrale, de 1862 à 1887 inclusivement. — (Chez Foucart, éditeur, 45, boulevard Saint-Michel; et Gauthier-Villars et fils, éditeurs, 55, quai des Grands-Augustins).

Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle, par A. de Saint-Germain, professeur à la Faculté des Sciences de Caen; deuxième édition, revue et augmentée. (Gauthier-Villars et fils. — Un volume in-8, 1889. — Prix : 9 fr. 50 c.)

La première édition de ce Recueil a été favorablement accueillie par les étudiants et par les maîtres et, dans la nouvelle édition, l'auteur est resté fidèle à son plan primitif, mais il a revu et complètement remanié son travail; il s'est attaché à rendre la rédaction tout à fait satisfaisante et à faire disparaître toutes les incorrections de détails; l'Ouvrage a été augmenté de près d'un quart de son étendue primitive par l'introduction de questions et de développements susceptibles d'intéresser les lecteurs auxquels il s'adresse spécialement, c'est-à-dire les aspirants à la Licence et à l'Agrégation; citons notamment des études sur les forces qui ne changent pas quand on déplace leur point d'application, sur les tautochrones et les brachistochrones, sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, puis les problèmes donnés à l'Agrégation depuis une dizaine d'années et un grand nombre d'exercices proposés à la fin de chaque chapitre; pour ces derniers, l'auteur ne s'est plus borné à donner les énoncés : il les a le plus souvent fait suivre d'indications propres, soit à guider l'élève, soit à lui permettre de contrôler les résultats qu'il aura obtenus (*).

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1888

Solution par M. Leinekugel, élève au Lycée de Douai.

Soit C *la courbe, lieu géométrique des sommets des angles de grandeur constante, circonscrits à une ellipse donnée* E; *et* D *une droite également donnée. 1° Démontrer qu'il y a trois coniques tangentes à la droite* D *et touchant en quatre points la courbe* C.

(*) Extrait de la préface.

Déterminer la nature de ces trois coniques. 2° Soit α_1, α_2, α_3, α_4 les points où la droite D *rencontre la courbe* C; *par deux de ces points, α_1, α_2 par exemple, on fait passer une série de cercles coupant la courbe* C *en deux points variables* M, M'; *et on demande de trouver la courbe enveloppe des droites* MM'. *3° On suppose la droite* D *tangente à l'ellipse* E, *et, par les points α_1, α_2, α_3, α_4, où cette tangente rencontre la courbe* C, *on mène à l'ellipse des tangentes autres que la tangente* D : *trouver le lieu décrit par les sommets du quadrilatère formé par ces tangentes, quand la droite* D *roule sur l'ellipse* E.

1. — L'équation de la courbe C est, comme on le sait,

$$(c)\qquad (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2K^2 = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2.$$

Si l'ellipse E est rapportée à ses axes, K désigne une constante positive.

L'équation $\mu^2 - 2K\mu(x^2+y^2-a^2-b^2)+b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ (Γ) est celle d'une conique dont l'enveloppe, quand μ varie, est la courbe C. Or, comme toute enveloppée est tangente à son enveloppe, il y a certainement un point où la courbe (C) a même tangente que (Γ).

Comme les deux courbes sont symétriques par rapport aux deux axes, il y a quatre points de contact symétriques deux à deux par rapport aux deux axes; ces quatre points sont donc sur un cercle concentrique aux deux courbes (C) et (Γ).

Soit $y = mx + n$ l'équation de la droite D. Exprimons qu'elle est tangente à Γ; nous aurons :

$$[a^2 - 2K\mu]^2m^2n^2 - [b^2 - 2K\mu + m^2(a^2 - 2K\mu)][(n^2 - b^2)(a^2 - 2K\mu) + \mu^2 + 2Ka^2\mu] = 0;$$

ou en simplifiant :

$$0=(a^2-2K\mu)(b^2-2K\mu)(n^2-b^2)+(b^2-2K\mu)(\mu^2+2K\mu a^2)+m^2(a^2 - 2K\mu)(\mu^2 + 2K\mu a^2) - m^2b^2(a^2 - 2K\mu)^2;$$

équation du troisième degré, en μ, qui prouve qu'il y a trois coniques tangentes, en quatre points, à la courbe C et à la droite D. Ces coniques seront des ellipses, des hyperboles ou des paraboles selon que

$$(a^2 - 2K\mu)(b^2 - 2K\mu) \gtreqless 0.$$

Substituons les racines $\frac{a^2}{2K}, \frac{b^2}{2K}$ dans l'équation du troi-

sième degré, nous obtenons, comme résultats :

$$\begin{array}{cccc} -\infty & \dfrac{b^2}{2K} & \dfrac{a^2}{2K} & +\infty \\ + & + & - & - \end{array}$$

Il y a donc toujours une hyperbole et deux ellipses qui peuvent être réelles ou *imaginaires* : jamais de parabole.

2. — Prenons, comme axes, la droite D et la perpendiculaire au milieu de $\alpha_1\alpha_2$, : la conique donnée a pour équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

L'équation de C est, dans ce cas,

$$K^2[f'(x^2 + y^2) + 2d'x + 2e'y + a' + c']^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f;$$

f', d', e', a', c' désignant les mineurs du discriminant de l'équation de E, relatifs aux lettres non accentuées. Soit

$$(C') \qquad x^2 + y^2 + 2\lambda x - \rho = 0$$

l'équation d'un cercle passant par α_1, α_2. (C'), a en commun avec (C), les deux ombilics du plan qui sont des points doubles de (C) les deux points α_1, α_2 et deux autres points M, M', cherchons l'équation de la droite qui les joint. Par les quatre points à distance finie, communs à (C) et à (C'), passe la conique (Γ')

$$(\Gamma') \quad K^2[2e'y + 2x(d' + f'\lambda) + a' + c' - f'\rho]^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f;$$

cette conique doit passer par les points α_1, α_2, d'où les deux relations

$$(1) \qquad e - 2e'K^2(a' + c' - f'\rho) = 0,$$

$$(2) \qquad \rho(c - 4K^2e'^2) + f - K^2(a' + c' + f'\rho)^2 = 0.$$

On voit que ρ est une quantité fixe, ce qui était évident *a priori*, α_1, α_2 étant fixes ; λ est un paramètre variable. En tenant compte des relations (1) et (2), l'équation de la conique (Γ') devient :

$$(\Gamma') \left\{ \begin{array}{l} y^2(c - 4K^2e'^2) + x^2[a - 4K^2(d' + f'\lambda^2)] + 2xy \\ {}[b - 4e'K^2(d' + f'\lambda)] + 2x[d - 2K^2(d' + f'\lambda)(a' + c' - f'\rho) \\ \qquad - \rho(c - 4K^2e'^2) = 0. \end{array} \right.$$

Pour obtenir l'équation de la corde MM' commune à cette conique (Γ') et au cercle (C'), nous retranchons les deux équations, après avoir préalablement multiplié l'équation de C' par le facteur $(c - 4K^2e'^2)$; nous obtenons, pour l'équation de MM' :

$$x[a + c - 4K^2\mu^2 - 4K^2c'^2] + 2y[b - 4e'K^2\mu]$$
$$+ 2[d - 2K^2\mu(a' + c' - f'\rho) - \frac{\mu - d'}{f'}(c - 4K^2e'^2)] = 0;$$

μ désignant $d' + f'\lambda$. En ordonnant par rapport à μ l'équation de MM', on a

$$4K^2\mu^2x + 2\mu\left[4K^2e'y + \frac{e}{e'} + \frac{c - 4K^2e'^2}{f'}\right] + x(a + c - 4K^2e'^2)$$
$$+ 2by + 2\left[d + \frac{d'}{f'}(e - 4K^2e'^2)\right] = 0,$$

ce qui peut s'écrire :

$$A\mu^2x + 2\mu(By + C) + Dx + Ey + F = 0.$$

Cette droite enveloppe, par suite, une conique tangente à la droite D et représentée par l'équation

$$(\Gamma'') \qquad (By + C)^2 - Ax(Dx + Ey + F) = 0,$$

(Γ'') sera une ellipse si l'on a

$$AE^2 - 4B^2D < 0,$$

ou
$$16K^4e'^4 - 4K^2e'^2(a + c) + b^2 < 0,$$

c'est à-dire si l'on donne à K^2 une valeur comprise entre les racines de ce trinôme du second degré en K^2, égale à zéro; dans le cas contraire, ce sera une hyperbole. Enfin, si K^2 prend la valeur de l'une des deux racines, la conique enveloppe sera une parabole.

[Il serait très facile de chercher l'enveloppe de la conique (Γ'') quand K varie; on pourrait, sur cette conique (Γ''), proposer des lieux géométriques à trouver, tels que le lieu des centres, des foyers; K variant.]

Si $b=0$ c'est-à-dire si les axes de l'ellipse (E) sont parallèles aux axes choisis, ce qui revient à dire que la droite D est parallèle à l'un des axes de (E), la conique enveloppe (Γ''') a ses axes également parallèles à ceux de (E). De plus, dans ce cas, (Γ'') pourra être un cercle si

$$B^2 + AD = 0,$$

ou si
$$a + c = 0,$$

ce qui signifie que E doit être une hyperbole équilatère.

La conique enveloppe de MM' (Γ'') sera une hyperbole équilatère si
$$B^2 - AD = 0,$$

ou
$$K^2 = \frac{a + c}{16e'^2}.$$

3. — Il est évident que, des sommets du quadrilatère considéré, on voit la conique E sous des angles constants.

Nous allons, maintenant, entrer dans quelques développements provoqués par la question précédents,

(A suivre.)

EXERCICES ÉCRITS

17. — 1° Étant donnée une ellipse, trouver la condition pour que quatre de ses points soient sur une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de l'ellipse.

2° Par tout point de l'ellipse passent trois de ces hyperboles, osculatrices à l'ellipse. Les points d'osculation sont sur une hyperbole équilatère passant au point donné, et ayant ses asymptotes parallèles aux axes de l'ellipse. Ils forment un triangle dont le centre de gravité coïncide avec le centre de l'ellipse, et tel que les normales aux trois sommets sont courantes.

3° Il existe quatre de ces hyperboles, surosculatrices à l'ellipse. Les points de surosculation sont les extrémités des diamètres conjugués égaux ; et le centre de l'une de ces hyperboles s'obtient en prolongeant le diamètre correspondant d'une longueur double (*).

(BALITRAND, élève au lycée de Nîmes.)

Notes sur l'exercice 16.

En désignant par α l'inclinaisoh du rayon OP snr OA, on exprime successivement tous les éléments de la figure mobile considérée dans cet exercice.

1° On voit d'abord que les circonférences $\Delta'\Delta''$ vont passer, l'une et l'autre, par le milieu de I de PQ ; point dont les coordonnées sont

$$x_1 = \frac{R}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha), \qquad y_1 = \frac{R}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Le lieu de I est la circonférence à laquelle PQ, dans son mouvement, est constamment tangente.

(*) Les termes *osculation* et *surosculation* employés dans cet énoncé ne sont pas corrects, mais nous les avons conservés parce qu'ils se prêtent commodément à l'énoncé précédent.

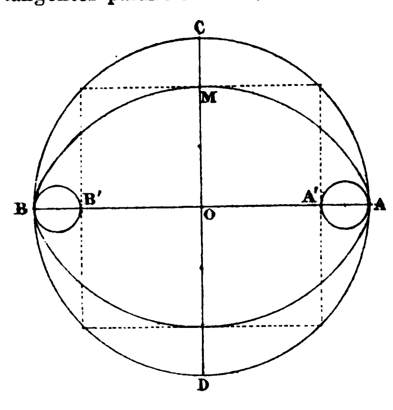
Deux coniques γ, γ' ne peuvent être osculatrices en un point M que si

Le lieu du point I' est une courbe du sixième ordre, unicursale. Les coordonnées de I' sont, en effet,

$$x_1 = R(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \qquad y_1 = R \sin\alpha \cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

La courbe correspondante a la forme indiquée par la figure ci-dessous.

Pour préciser le tracé de cette courbe, il importe de déterminer les tangentes parallèles à AB.



A cet effet, on doit chercher le maximum de y_1. Or on a

$$\left(\frac{y_2}{R}\right)^2 = \sin^2\alpha \cos^2\alpha(1 + 2 \sin\alpha \cos\alpha).$$

Posons $\sin\alpha \cos\alpha = \theta$.

L'égalité précédente devient

$$\left(\frac{y_1}{R}\right)^2 = \theta^2(1 + 2\theta).$$

Différentiant par rapport à θ, nous avons

$$\theta(1 + 3\theta) = 0.$$

La solution $\theta = 0$, donne les points doubles A, B. En prenant

$$\theta = -\frac{1}{3},$$

on a $$y = \pm R\frac{\sqrt{3}}{9};$$

les droites correspondantes sont tangentes aux foliums BB', AA'.

On observera que, en opérant comme nous l'avons fait, on ne trouve pas le maximum correspondant au point M. C'est que le changement de variable peut, dans certains cas, provoquer ces anomalies apparentes.

Nous avions à résoudre l'équation

(1) $$\frac{dy_1}{d\alpha} = 0.$$

Or, $$\frac{dy_1}{d\alpha} = \frac{dy_1}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\alpha}.$$

On doit donc chercher les solutions de l'équation

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = 0$$

qui ne rendent pas infini le facteur $\frac{dy_1}{d\theta}$. Dans le cas présent, on a

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \cos 2\alpha;$$

et, pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on a une solution de l'équation (1).

2° Les cercles Δ' Δ'' se coupent au milieu I de PQ et en un autre point I'', dont les coordonnées se calculent facilement :

---

elles ont, en ce point, le *maximum* de points confondus ; c'est-à-dire, en général, quatre points. Lorsqu'elles ont seulement trois points confondus, en M, elles ont, en ce point, un contact du second ordre ; elles ne sont osculatrices que si l'une d'elles est un cercle. G. L.

$$x_3 = R \sin\alpha \cos\alpha(\sin\alpha - \cos\alpha),$$
$$y_3 = R \sin\alpha \cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

En cherchant l'équation polaire de cette courbe, on trouve

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos 2\omega;$$

la courbe correspondante est la *rosace à quatre feuilles* (*C. M. S.*, t. II, p. 598).

3° Le lieu du centre de similitude est une quartique dont l'équation cartésienne est

$$4(y^2 - x^2)^2 - 4R^2(y - x)^2 + R^4 = 0;$$

et d'une quartique correspondant à cette équation, lorsqu'on change x en $-x$; on les construira facilement On peut aussi, si l'on préfère, construire la première quartique au moyen des formules

$$x = -\frac{R}{4}\frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{\sin\alpha},$$
$$y = \frac{R}{4}\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

Nota. — Autre solution par M. Gaffre, maître répétiteur au collège d'Argentan.

QUESTION PROPOSÉE

262. — 1° On donne dans un plan une circonférence Γ de centre O et deux points quelconques A, B. Par le point A on mène une sécante variable qui coupe Γ en deux points C, D; on fait passer une circonférence Δ par les points C, D et B, on demande le lieu du centre Δ.

Dans le cas particulior où le point B est sur la polaire de A par rapport à Γ, montrer que le lieu passe par le milieu de OB.

2° On donne dans un plan une conique Γ et deux points quelconques A, B. Par les points A, B il passe une infinité de coniques Δ homothétiques de Γ, on demande le lieu des centres de Δ.

3° Déterminer une conique passant par trois points donnés et homothétique d'une conique donnée.

4° On peut généraliser ainsi le problème 1 : on donne dans un plan une conique Γ, et deux points quelconques A, B. Par le point A on mène une sécante variable qui coupe Γ en deux points C, D; on fait passer une conique Δ, homothétique de Γ, par les points C, D et B; on demande le lieu du centre de Δ.

5° Enfin, voici le problème dans toute sa généralité : on

donne dans un plan une conique Γ, deux points P, Q sur cette conique et deux points quelconques A, B. Par le point A on mène une sécante variable qui coupe Γ en deux points C, D ; on fait passer une conique Δ par les points C, D et P, Q, B, on demande le lieu du centre de Δ.

NOTA. — Dans ces problèmes, au lieu de chercher le lieu du centre de Δ, on peut chercher le lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à Δ.

(*B. Malloizel.*)

NOTA. — L'article de M. Poulain, publié dans le précédent numéro, doit porter, à la dernière ligne, les mots *à suivre*. Le numéro de mars renfermera la fin de ce mémoire. G. L.

Monsieur Kœhler, examinateur pour l'entrée à l'École Polytechnique, qui fut, pendant plusieurs années, le Directeur-Gérant de ce journal, est mort le 20 janvier dernier, à Paris, après une longue et douloureuse maladie. Monsieur L. Lévy consacrera à cet homme de bien, à ce savant, aussi modeste qu'érudit, une notice biographique, dans le prochain numéro de ce journal. Nous ne pouvons aujourd'hui, avant d'avoir recueilli les renseignements nécessaires, qu'adresser à sa mémoire l'expression bien sincèrement émue de nos sentiments de profonde estime.

G. L. et L. L.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 1482-1-9.

SUR LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR
ALGÉBRIQUE

Par M. **Édouard Lucas.**

(*Suite*, voir, p. 25.)

2. — On peut donner une autre expression des polynômes V_p, R_p, S_p en fonction des coefficients du développement

$$\frac{G(x)}{F(x)} = \frac{t_0}{x} + \frac{t_1}{x^2} + \frac{t_2}{x^3} + \ldots + \frac{t_{p-1}}{x^p} + \ldots,$$

lequel est convergent, pour toutes les valeurs de x dont le module est plus grand que le plus grand module des racines de l'équation $F(x) = 0$ (*). On sait que l'on a les formules

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0t_0, \\ b_1 &= a_0t_1 + a_1t_0, \\ b_2 &= a_0t_2 + a_1t_1 + a_2t_0, \\ b_3 &= a_0t_3 + a_1t_2 + a_2t_1 + a_3t_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et ainsi indéfiniment, et qu'on peut en déduire t_0, t_1, t_2, ... sous forme de déterminant.

Cela posé, on a l'identité

$$\lambda_p = a_0^{2p+1} \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \ldots & t_p \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_{p+1} \\ t_2 & t_3 & t_4 & \ldots & t_{p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_p & t_{p+1} & t_{p+2} & \ldots & t_{2p} \end{vmatrix}.$$

Pour plus de simplicité, supposons $p = 2$, on a

$$a_0^5 \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = a_0^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_0 & t_1 & t_2 \\ 0 & t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}$$

(*) La condition de convergence ne suppose pas le théorème de d'Alembert; il suffit de prendre la limite du module des racines qui a été donnée par Cauchy, sans qu'il soit nécessaire de supposer l'existence des racines d'une équation.

On multiplie les colonnes respectivement par a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 et l'on remplace la dernière colonne par la somme des cinq colonnes ; puis on multiplie les quatre premières colonnes respectivement par a_3, a_2, a_1, a_0 et l'on remplace la quatrième colonne par la somme des quatre colonnes ; et ainsi de suite ; on trouve ainsi le déterminant λ_2.

La nouvelle expression de V_p est donnée par la formule suivante :

$$(-1)^p \mu_p V_p = \begin{vmatrix} t_0 \; t_1 \dots t_{p-1} & \dfrac{t_p}{x^{p+1}} + \dfrac{t_{p+1}}{x^{p+2}} + \dots \\ t_1 \; t_2 \dots t_p & \dfrac{t_{p+1}}{x^{p+1}} + \dfrac{t_{p+2}}{x^{p+2}} + \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ t_p \; t_{p+1} \dots t_{2p-1} & \dfrac{t_{2p}}{x^{p+1}} + \dfrac{t_{2p+1}}{x^{p+2}} + \dots \end{vmatrix} F(x).$$

En effet, posons, pour abréger,

$$t_0 x^q + t_1 x^{q-1} + t_2 x^{q-2} + \dots + t_q = P_q;$$

Si l'on ajoute, à la dernière colonne du déterminant, la somme de toutes les autres colonnes divisées respectivement par $x, x^2, x^3, \dots, x^p$, et si l'on multiplie ensuite la dernière colonne par F, il vient

$$\begin{vmatrix} t_0 \; t_1 \dots t_{p-1} & G \\ t_1 \; t_2 \dots t_p & xG - P_0 F \\ t_2 \; t_3 \dots t_{p+1} & x^2 G - P_1 F \\ \dots & \dots \\ t_p \; t_{p+1} \dots t_{2p-1} & x^p G - P_{p-1} F \end{vmatrix}.$$

Par conséquent, l'expression précédente est un polynôme entier, de la forme $R_p F - S_p G$; et, d'après la première forme, un polynôme de degré $m - p - 1$ dont le premier coefficient est λ_p; il est donc égal à $(-1)^p \mu_p V_p$. C. Q. F. D.

On en déduit, comme à la fin du numéro précédent, les expressions de R_p et de S_p.

DES COORDONNÉES TRIPOLAIRES.

Par M. **Aug. Poulain,** à Angers.

(*Suite*, voir p. 3.)

III. — *Angles et distances.*

17. — Nous regarderons les distances des points M à une droite Δ comme positives d'un côté de Δ, négatives de l'autre. Les formules qui vont suivre permettront de calculer pour toute droite remarquable sa distance à un point et ses angles avec les côtés de ABC.

Appelons ξ, η, ζ les angles sous lesquels les côtés de ABC sont coupés par une droite Δ ou un cercle O′, de rayon R′. Pour définir sans ambiguïté les signes des cosinus, adoptons un sens de parcours sur le périmètre du triangle et un autre sur Δ ou sur le cercle. Les angles ξ,... sont ceux des directions aux points de rencontre.

18. Théorème VI. — *Les coordonnées barycentriques relatives sont pour le centre O′, si on choisit convenablement le sens sur le cercle,*

$$(30) \qquad l = \frac{S'}{2S} R'a \cos \xi, \ldots$$

On le prouve en montrant sur la figure que la perpendiculaire abaissée de O′ sur BC est toujours, en grandeur et en signe, $1/2$ R′ cos ξ.

19. Corollaire I. — En enchaînant les rapports fournis par (30), on a

$$(31) \qquad \frac{a \cos \xi}{l} = \frac{b \cos \eta}{m} = \frac{c \cos \zeta}{n} = \frac{2S}{S'R'}$$

$$(32) \qquad = \frac{2S}{\sqrt{-qS' - \Sigma a^2 mn}}.$$

Sous le radical, $-\Sigma a^2 mn$ ou t peut être remplacé par les expressions (28) et (29).

Pour R′ réel, ces formules donnent pour les cosinus des

valeurs réelles. On est averti que le cercle ne coupe pas un côté quand on trouve pour le cosinus correspondant une valeur plus grande que un.

20. — Donc 1° l, m, n sont proportionnels à $a \cos \xi$, ..

2° Deux cercles concentriques ont dès lors (4) leurs cosinus proportionnels.

3° Les proportions donnent

$$\frac{\Sigma a \cos \xi}{S'} = \frac{2S}{S'R'},$$

d'où

(33) $$R'\Sigma a \cos \xi = 2S,$$

qu'on peut prouver directement comme (11).

4° L'équation générale des cercles coupant les côtés sous les angles ξ,... est

(34) $$\Sigma a \cos \xi . \lambda^2 + q = 0.$$

5° Quand l'équation est mise sous cette forme, la relation (32) oblige le radical à être égal à 2S.

21. Corollaire II. — Les proportions (31) (si on en supprime le rapport contenant S'R') s'appliquent à la droite Δ, ainsi que leurs conséquences. Remarquons de plus que :

1° A cause de $S' = 0$, les trois coefficients l, m, n ne peuvent avoir tous le même signe. Il en est donc de même des trois cosinus ; et dès lors il y a toujours deux angles aigus et un obtus, ou inversement. Cela dépend du sens adopté sur le périmètre. Les deux angles de même espèce correspondent à ceux des coefficients directeurs qui ont le même signe.

2° Les perpendiculaires à Δ ont pour équation

(35) $$\Sigma \lambda^2 a \sin \xi + q' = 0.$$

3° La quantité sous radical peut se transformer, à cause de $S' = 0$. Elle devient

(36) (37) $$t = -\Sigma a^2 mn = \Sigma l^2 bc \cos A = 2S\Sigma l^2 \operatorname{cotg} A.$$

Alors aussi elle égale

(38) $$\frac{a^2(mc \cos B - nb \cos C)^2 + 4S^2 l^2}{a^2}.$$

4° Par suite on a

(39) $$\sin \xi = \frac{\pm(mc \cos B - nb \cos C)}{\sqrt{-\Sigma a^2 mn}},$$

le numérateur étant toujours pris positivement. On a dès lors

$$(40)\qquad \mathrm{tg}\,\xi = \frac{\pm a(mc\cos B - nb\cos C)}{2Sl}.$$

22. — Pour m et n positifs, l'inégalité

$$(41)\qquad mc\cos B - nb\cos C > 0$$

signifie que AA_1, menée parallèlement à Δ, a son pied à droite de H_a (du côté de C). Car alors sa perpendiculaire AA′ a son pied à gauche. Dès lors le rapport des segments qu'elle détermine sur BC est plus petit que le rapport déterminé par H_a; ce qui se traduit par une inégalité équivalente à (41).

23. *Angle* V *de deux droites.* — On a

$$(42)\qquad lm' - ml' = mn' - nm' = nl' - ln',$$

$$(43)\qquad \sin V = \frac{-2S}{\sqrt{tt'}}(mn' - nm'),$$

$$(44)\qquad \cos V = \sqrt{\frac{tt' - 4S^2(mn' - nm')^2}{tt'}}$$

$$(45)\qquad = \frac{c^2mm' + b^2nn' + (mn' + nm')bc\cos A}{\sqrt{tt'}}$$

$$(46)\qquad = \frac{-\Sigma a^2(mn' + nm')}{2\sqrt{tt'}}.$$

(42) se vérifie en remplaçant l, l' par leurs valeurs $-(m+n)$, $-(m'+n')$. Pour obtenir (43), menons par A des parallèles à Δ, Δ' et supposons, par exemple, que leurs pieds soient tous deux à droite de H_a; ce qui détermine les signes de certains binômes **(22)**. Au signe près,

$$\sin V = \sin(\xi - \xi')$$

$$= \frac{2S}{a\sqrt{tt'}}[l'(mc\cos B - nb\cos C) - l(m'c\cos B - n'b\cos C)]$$

$$= \frac{-2S}{a\sqrt{tt'}}[(lm' - ml')c\cos B + (nl' - ln')b\cos C];$$

ce qui, en tenant compte de (42) donne (43).

La première formule du cosinus se déduit immédiatement de celle du sinus. Pour la seconde, on pose, en remplaçant

2S par ah_a,

$$\cos V = \cos(\xi - \xi')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{tt'}}[h_a^2 ll' + (mc\cos B - nb\cos C)(m'c\cos B - n'b\cos C)]$$

si on remplace l, l' par leurs valeurs, on trouve (45) qui devient (46), si on remplace $bc\cos A$ par $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$.

24. *Distance de* M *à* Δ. — Pour obtenir cette normale, calculons d'abord le produit des normales MP, MP + 2R′ menées de M à un cercle qui dégénérera en droite. Nous avons d'après (27)

$$(47) \qquad MP(MP + 2R') = \frac{R'f(\lambda, \mu, \nu)}{\sqrt{-qS' + t}}.$$

D'où, divisant membre à membre par MP + 2R′ et faisant $R' = \infty$,

$$(48) \qquad \delta = \frac{f(\lambda, \mu, \nu)}{2\sqrt{t}}.$$

25. — Si dans (48), nous remplaçons λ, μ, ν par $\lambda_0, \ldots$ et qu'on ait $S' = 0$, cette équation exprime la condition pour qu'une droite soit située à une distance δ d'un point M_0, c'est-à-dire *pour qu'elle soit tangente au cercle de centre* M_0 *et de rayon* δ. De là, on tire q et on en déduit l'équation générale des tangentes.

26. — Quand l'équation d'une droite est de la forme

$$\Sigma a \cos\xi.\lambda^2 + q = 0$$

on a

$$q = \pm 4\,\delta_0 S, \qquad (49)$$

car nous avons dit qu'alors (20, 5°), le radical de δ_0 se réduit à 2S et dès lors la formule (48) se réduit à celle-ci.

26. Application. — L'équation de la droite d'Euler, OG, est

$$(50) \qquad (b^2 - c^2)\lambda^2 + (c^2 - a^2)\mu^2 + (a^2 - b^2)\nu^2 = 0.$$

Car, puisque $q = 0$, cette droite passe par O et on vérifie facilement qu'elle passe par G. Elle passe aussi par H. Car ses coordonnées sont

$$\lambda^2 = 4\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdots$$

En tenant compte des égalités

$$(51)\qquad \frac{a^2 - b^2}{c} = a \cos B - b \cos A = 2R \sin (A - B).$$

on peut écrire l'équation de deux autres manières.

27. — L'équation montre (4) que *la droite est perpendiculaire à la direction dans laquelle se trouve le point dont les coordonnées barycentriques sont $b^2 - c^2$, . ; c'est-à-dire l'associé à l'infini du point de Lemoine.*

28. — On trouve, en tenant compte de (50),

$$(52)\qquad \frac{\delta_a}{\delta_b} = \frac{(c^2 - b^2)(c^2 + b^2 - a^2)}{(a^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)} = \frac{\cos A \sin (C - B)}{\cos B \sin (A - C)};$$

ce qui donne le rapport des distances de A et B à la droite d'Euler et par suite *le rapport des segments qu'elle détermine sur* AB. La droite AA′ qui lui est perpendiculaire divise (4) AB dans le rapport

$$(53)\qquad \frac{c^2 - a^2}{b^2 - c^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{b \sin (C - A)}{a \sin (B - C)}.$$

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE

Par M. **Emile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 27.)

89. Cercle de Taylor. — C'est encore un cas particulier des cercles de Tucker; il correspond l'hypothèse :

$$\lambda = \frac{1}{4R^2}, \qquad \text{tg}\, \varphi = - \text{tg}\, A\, \text{tg}\, B\, \text{tg}\, C.$$

L'angle φ est appelé *Angle de Taylor.*

Le cercle de Taylor (*) est concentrique au cercle inscrit

(*) Dans *The Mathematical Tripos examination papers* (janvier 1882), M. H. M. Taylor avait proposé de démontrer que les projections des pieds des hauteurs, sur les côtés d'un triangle, sont six points d'un même cercle cercle de Taylor). Il étudia ce cercle dans une Note intitulée *On a six-*

au triangle complémentaire du triangle orthique de ABC. Il a pour équation :

$$\sum \frac{yz}{b^2c^2} - \frac{1}{16R^4} \sum x \sum x \operatorname{cotg}^2 A = 0.$$

90. Cercles de Neuberg (N_a, N_b, N_c). — Si, sur chacun des trois côtés du triangle de référence, on construit des triangles ayant même angle de Brocard que ABC, le sommet libre décrit une circonférence. Les trois circonférences ainsi obtenues sont les *cercles de Neuberg* (**); nous les désignons par les lettres N_a, N_b, N_c.

Le cercle N_a a pour équation :

$$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta - a^2(\beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) = 0;$$

ou, en coordonnées normales,

$$xy \sin C + yz \sin A + xz \sin B = \sin A(y \operatorname{cos\acute{e}c} C + z \operatorname{cos\acute{e}c} B)$$
$$(x \sin A + y \sin B + z \sin C).$$

Son rayon est :

$$\rho_a = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{cotg} \omega - 3}.$$

On obtient des formules analogues pour les cercles N_b, N_c.

91. Cercles de M'Cay (M_a, M_b, M_c). — Si, sur les côtés du triangle de référence, comme segments homologues, on construit des figures semblables, il existe une infinité de points en ligne droite; ces points décrivent trois cercles appe-

---

point circle connected with a triangle, publiée dans *The Messenger of Mathematics* (vol. XI, 1881-82, pp. 177-179), d'où le nom de *cercle de Taylor* proposé par M. Rowe. M. Neuberg (*Sur les cercles de Tucker*, extrait de l'*Appendix* de l'*Educat. Times*, vol. XLIII, p. 81-85, parlant du problème que nous venons d'énoncer, dit à ce sujet : « Ce dernier théorème, démontré dans les *Théorèmes et problèmes* de Catalan, a été proposé aux lecteurs du Journal de Vuibert; nous ignorons à qui il est dû (comparer aussi N. C. M., t. VI, 1880, p. 183). » Nous emploierons, dans la suite, le terme de cercle de Taylor. Voir sur cercle :

Neuberg. — *Sur les cercles de Tucker* (*Reprint of E. T.*, vol. XLIII, p.81-85). *Equation des cercles de Tucker* (J. S. 1886).

Vigarié. — *Sur les points complémentaires* (M. 1887).

(**) Les cercles de Neuberg, comme les cercles de M'Cay portent les noms des géomètres qui les ont signalés à l'attention des mathématiciens. On peut consulter sur ce sujet :

J. Neuberg. — M. II, 1882, pp. 76, 94, 157, 186.

lés *cercles de M'Cay* (*); nous les désignerons par les lettres M_a, M_b, M_c.

Le cercle M_a a pour équation

$$\Sigma a^2\beta\gamma - \frac{1}{3}\Sigma\alpha(2bc \cos A.\alpha + a^2\beta + a^2\gamma) = 0.$$

Formules analogues pour M_b, M_c.

92. Cercles d'Apollonius. — Ces cercles ont pour diamètre le segment d'un côté, déterminé par les deux bissectrices issues d'un même sommet. Le cercle ayant son diamètre sur BC a pour équation :

$$\frac{a^2b^2c^2}{b^2 - c^2}\left(-\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) - \Sigma\, a^2\beta\gamma = 0.$$

Formules analogues pour les deux autres cercles. Les cercles d'Apollonius (**) se coupent aux deux centres isodynamiques; les cordes communes avec le cercle circonscrit sont les symédianes.

93. Cercles de Schoute. — Le lieu d'un point M tel que le triangle podaire (ayant pour sommet les projections orthogonales de M sur les côtés de ABC) ait un angle de Brocard, donné, ω_1, est un cercle appelé *cercle de Schoute* (***); il a pour équation :

$$\Sigma yz \sin A(\cot g\, \omega_1 + \cot g\, \omega)\Sigma ax \Sigma \frac{a}{x} = 0.$$

Ces cercles ont même axe radical : la droite de Lemoine. La droite de Lemoine, le cercle circonscrit, et le cercle de Brocard sont des cas particuliers des cercles de Schoute.

(*) M'Cay. — *On three circles related to a triangle* (*Transactions of the royal Irish academy*, vol. XVIII, p. 453-470).

J. Casey. — *A treatise on analytical geometry*, 1885, pp. 73, 107, 120, 248, 256, 258, 259, 326; *A Sequel to Euclid*, 4e édit., 1886, pp. 207-208, 213-214.

T. C. Simmons. — *Companion to the weekly problem papers*, 1888, pp. 172-173.

E. Vigarié. — *Sur quelques cercles remarquables* (J. E. 1887).

(*) Voir Neuberg : *Sur le quadrilatère harmonique* (M. t. V, 1885, p. 202).

(**) Voir P. H. Schoute : *Over een nauwer verband tusschen hoek en cirkel van Brocard* (Groningue, septembre 1886).

94. Ellipse de Brocard. — Cette ellipse qui joue un grand rôle dans la géométrie du triangle, a pour équation :

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 0.$$

Elle a pour foyers les points de Brocard ; elle est inscrite au triangle et touche les côtés aux pieds des symédianes (*) ; c'est aussi l'enveloppe des cercles de Tucker.

95. Ellipse K. — Elle est inscrite au triangle, touche les côtés aux pieds des hauteurs et a pour centre le point K de Lemoine. Elle a pour équation :

$$\sqrt{x \cos A} + \sqrt{y \cos B} + \sqrt{z \cos C} = 0.$$

96. Ellipse de Lemoine. — Cette conique a pour foyers le centre de gravité et le point de Lemoine ; elle est inscrite au triangle et touche les côtés aux pieds des symédianes des triangles BGC, CGA, AGB. Elle a pour équation :

$$\sqrt{\frac{\alpha}{m_a^2}} + \sqrt{\frac{\beta}{m_b^2}} + \sqrt{\frac{\gamma}{m_c^2}} = 0,$$

m_a, m_b, m_c étant les longueurs des médianes.

97. Ellipse de Simmons. — Elle a pour foyers le premier centre isogone et le premier centre isodynamique, elle est inscrite au triangle et touche les côtés aux pieds des droites qui joignent les sommets au premier centre isogone (**) ; elle a pour équation :

$$\sqrt{x \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)} + \sqrt{y \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)} + \sqrt{z \sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right)} = 0.$$

98. Ellipse de Steiner. — C'est la conique circonscrite au triangle et qui a pour centre le centre de gravité G (**).

(*) On trouvera une étude complète de cette conique dans le chapitre que M. T. C. Simmons a consacré à la Géométrie du triangle dans *The companion to the weekly problem papers*, par Rev. J.-J. Milne, 1888, pp. 104-111.

(**) T. C. Simmons. — *Companion to the weekly problem papers*, 1888, chap. VII, p. 163-167.

Elle a pour équation :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0.$$

Elle passe par le point de Steiner R. (*)

99. Hyperbole de Kiepert (Γ). — Si α, β, γ sont les sommets de trois triangles isoscèles semblables $BC\alpha$, $CA\beta$, $AB\gamma$ dont l'angle à la base est θ, l'hyperbole de Kiepert est le lieu des points d'intersection des droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$. Le triangle $\alpha\beta\gamma$ est appelé *triangle de Kiepert* et θ l'*angle de Kiepert*. Elle a pour équation :

$$(b^2 - c^2)bcxy + (c^2 - a^2)caxz + (a^2 - b^2)abxy = 0,$$

ou

$$\frac{\sin(B - C)}{x} + \frac{\sin(C - A)}{y} + \frac{\sin(A - B)}{z} = 0.$$

L'hyperbole de Kiepert est la transformée par points inverses de la droite OK, elle est équilatère, circonscrite au triangle et passe par les points G, H, N et beaucoup d'autres (*).

100. Parabole de Kiepert. — C'est l'enveloppe des axes d'homologie du triangle ABC avec les triangles de Kiepert, son foyer est sur le cercle circonscrit et a pour coordonnées :

$$x : y : z = \frac{1}{\sin(B - C)} : \frac{1}{\sin(C - A)} : \frac{1}{\sin(A - B)}.$$

Elle a pour équation :

$$\sqrt{(b^2 - c^2)\alpha} + \sqrt{(c^2 - a^2)\beta} + \sqrt{(a^2 - b^2)\gamma} = 0.$$

(A suivre.)

(*) Sur cette ellipse consulter :

J. Neuberg. — *Sur le point de Steiner* (*J. S.* 1886. p. 28, 51, 73).

E. Cesáro. — *Remarques sur la Géométrie du triangle.* (*N. A. M.* Mai 1887).

(**) Voir sur l'hyperbole de Kiepert :

Kiepert. — *N. A. M.* 1869, p. 40-42.

Lemoine. — *Annuaire* de l'Association Française; Lyon, 1873, p. 94.

H. Brocard. *Hyperbole des neuf points* (J. S. 1884, p. 197). — *Propriété de l'hyperbole des neuf points et des six paraboles remarquables* (J. S. 1885, p. 12, 30, 58, 76, 104, 123).

J. Casey. — *A treatise on conics*, 1885, p. 250-251.

G. de Longchamps. — *Le centre de la conique de Kiepert* (*J. S.* 1886, p. 77, 231).

Neuberg et Lemoine. — *Notes sur la Géométrie du triangle* (*Mathesis*, 1886, p. 74.)

W. M'Cay. — *Sur l'hyperbole de Kiepert* (M. 1887, t. VII, p. 208).

NOTE SUR DEUX FAISCEAUX DE TROIS DROITES

ET SOLUTION DE LA QUESTION 251,

Par M. **E. Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 35.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Lemme. — *On donne trois points fixes* A, B, C *sur une conique et deux autres points fixes* B_1 *et* C_1 *dans son plan ; soit* M *un point de la conique; par* B, *on mène une parallèle à* BM, *par* C_1 *une parallèle à* CM. *Ces deux parallèles se coupent en* M_1. *Démontrer que la parallèle à* AM, *menée par* M_1, *passe par un point fixe* A_1.

Je suppose d'abord que la conique donnée soit la circonférence circonscrite à ABC ; le point M_1 décrit le segment capable de CAB construit sur B_1C_1 ; car C_1 et B_1 sont fixes, les droites C_1M_1 et B_1M_1 sont parallèles à CM et à BM, l'angle CMB est toujours égal, soit à l'angle CAB, soit à son supplément. Soit A_1 le point où la parallèle à MA, menée par M_1, coupe l'arc capable; l'angle BMA égale l'angle $B_1M_1A_1$. Mais comme le premier de ces angles égale ACB, le second est aussi constant, et l'axe B_1A_1 est constant, c'est-à-dire que le point A_1 est fixe.

Le théorème étant ainsi démontré pour le cercle, s'étend à l'ellipse par voie projective et à toute conique au moyen du principe de continuité.

Remarque. — Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont directement semblables mais non homothétiques, c'est-à-dire que le sens ABC est le même que le sens $A_1B_1C_1$. En général, si deux triangles quelconques ABC, $A_1B_1C_1$ sont tels que le sens ABC soit le même que le sens $A_1B_1C_1$, je dirai que les deux triangles sont de même signe; ils seront de signes contraires dans l'autre cas.

Cette démonstration prouve, de plus, que les coniques,

lieux de M et de M_1, sont homothétiques; ce que nos démonstrations analytiques n'avaient pas mis en évidence.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui, sous une autre forme, est le théorème que nous avons proposé, mais complété par cette observation que les lieux de M et de M_1 sont homothétiques.

Si deux faisceaux de trois droites, parallèles deux à deux, passent chacune par trois points fixes A, B, C; A_1, B_1, C_1; *les sommets* M *et* M_1 *des deux faisceaux décrivent des coniques homothétiques, circonscrites, respectivement, à* ABC *et à* $A_1B_1C_1$.

Réciproquement : *Si l'on cherche le lieu des sommets de deux faisceaux formés, chacun, par trois droites, ces faisceaux ayant leurs droites parallèles deux à deux et passant chacune par un point fixe; on trouve deux coniques homothétiques circonscrites, l'une au triangle formé par les trois points fixes du premier faisceau, l'autre au triangle formé par les trois points fixes du second.*

REMARQUE. — Lorsque ces coniques homothétiques sont des ellipses, si on les projette sur un plan, de façon que leurs projections soient des circonférences, les points A, B, C, A_1, B_1, C_1, se projettent en a, b, c, a_1, b_1, c_1; et les triangles abc, $a_1b_1c_1$ sont semblables, d'une similitude de même signe, c'est-à-dire directement semblables, mais en général ils ne sont pas homothétiques.

Cherchons les relations existant entre les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ lorsque le lieu de M est le même, soit que l'on considère les triangles ABC, $A_1B_1C_1$, soit que l'on envisage les triangles ABC, $A_2B_2C_2$.

Si cela est, les lieux de M_1 et de M_2 sont homothétiques, comme étant tous deux homothétiques au lieu de M.

Sans modifier le lieu de M, je puis évidemment remplacer le triangle $A_2B_2C_2$ par un triangle $A_3B_3C_3$, homothétique à $A_2B_2C_2$, mais d'ailleurs quelconque; je choisis $A_3B_3C_3$ de façon qu'il soit inscrit à la conique M.

Cela posé, projetons la figure sur un plan de façon que la figure, lieu de M, se projette suivant une circonférence — il faut pour cela que le lieu de M, soit une ellipse; mais, en vertu du principe de continuité, le résultat de notre démonstration subsis-

tera dans tous les cas — les deux triangles abc, $a_3b_3c_3$, projections de ABC, $A_3B_3C_3$ sont égaux, car, d'après la remarque de notre Lemme, ils sont semblables et ils sont inscrits au même cercle, projection du lieu de M.

REMARQUE. — Les triangles ABC, $A_3B_3C_3$ sont équivalents.
De ce qui précède, on déduit les théorèmes suivants :

Si un triangle ABC *a même lieu* M *par rapport à deux triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, *les triangles* $A'_1B'_1C'_1$, $A'_2B'_2C'_2$, *homothétiques à* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *et inscrits à la conique* M, *ont tous deux même aire que* ABC, *Les trois coniques concentriques et homothétiques à* M *qui touchent respectivement* BC, CA, AB *touchent aussi* B_1C_1 et B_2C_2 ; C_1A_1 et C_2A_2 ; A_1B_1 et A_2B_2.

Si l'on considère un triangle ABC, *inscrit à une conique* M', *et que l'on trace les coniques* M_a, M_b, M_c *homothétiques et concentriques à* M' *et tangentes respectivement à* BC, BA, AB, *il y aura une infinité de triangles* $A_1B_1C_1$, *inscrits à* M' *et dont les côtés* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *seront tangents respectivement à* M_a, M_b, M_c. *Si l'on prend la conique* M *(définie comme précédemment) des deux triangles* ABC, $A_1B_1C_1$, *cette conique coïncidera avec* M'; *tous ces triangles sont équivalents.*

Observons que, dans la question que nous venons de traiter, le calcul et la géométrie semblent se prêter chacun plus particulièrement à un côté différent du problème. Le calcul nous donne le moyen de connaître en eux-mêmes et séparément les lieux de M ou de M_1 — et nous avons retrouvé là les lieux souvent rencontrés dans la Géométrie du triangle; mais il paraît moins commode d'étudier les rapports qu'ont entre eux les lieux de M et de M_1.

La Géométrie nous permet au contraire cette étude immédiatement en nous montrant, — ce qui est loin de ressortir aussi simplement de l'Analyse, — que les lieux de M et de M_1 sont homothétiques; mais l'étude des lieux en eux-mêmes demanderait des développements plus laborieux.

Observons que si ABC, $A_1B_1C_1$ sont de même signe, le lieu de M est une ellipse, et une hyperbole dans le cas contraire; cependant ABC étant fixe, ainsi que les directions A_1B_1, A_1C_1,

il y a deux directions de B_1C_1 pour lesquelles le lieu de M est une parabole.

La Géométrie nous fait apercevoir encore la liaison intime de la question que nous venons de traiter entre la suivante.

Soient deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$; *et appelons* abc, $a_1b_1c_1$ *leurs projections sur un plan quelconque, il y a en général trois directions de plans de projections pour lesquelles les angles* a, b, c *sont respectivement égaux aux angles* a_1, b_1, c_1 *si* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *sont de même signe, c'est-à-dire trois directions de plans de projection pour lesquelles les triangles* abc, $a_1b_1c_1$ *sont semblables; si* ABC, $A_1B_1C_1$ *sont de signes contraires, il y a trois directions pour lesquelles on a respectivement les angles égaux*

$$a = a_1,\ b = c_1,\ c = b_1;$$
$$a = c_1,\ b = b_1,\ c = a_1;\ a = b_1,\ b = a_1,\ c = c_1.$$

Pour le premier cas, par exemple, il suffira de trouver les plans pour lesquels la conique M, des triangles ABC, $A_1B_1C_1$; ABC, $C_1A_1B_1$; ABC, $B_1C_1A_1$ est une circonférence; sur ces plans les projections *abc*, $a_1b_1c_1$; *abc*, $c_1a_1b_1$; *abc*, $b_1c_1a_1$, seront alors respectivement semblables et de même signe.

Si les deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ *sont inscrits à une même conique* K; *que* BC *et* B_1C_1 *soient tangents à une conique* N; *que* CA *et* C_1A_1 *soient tangents à une conique* N'; *que* AB *et* A_1B_1 *soient tangents à une conique* N''; *que* N, N', N'' *soient concentriques et homothétiques à* K; *les lieux de* M *et de* M_1 *coïncideront et se confondront avec* K.

On sait que si deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont tels que les perpendiculaires abaissées de A, B, C, sur B_1C_1, sur C_1A_1, sur A_1B_1 se coupent en un même point; réciproquement les perpendiculaires abaissées de A_1, B_1, C_1, sur BC, sur CA et sur AB sont concourantes: disons alors que les deux triangles ABC $A_1B_1C_1$ sont orthologiques. Cette proposition résulte immédiatement de ce que les courbes, lieux de M et de M_1, étant homothétiques, si l'une, M par exemple, passe par le point de concours des hauteurs de ABC, c'est-à-dire est une hyperbole équilatère, M_1, aussi hyperbole équilatère, passera par le point de concours des hauteurs de $A_1B_1C_1$; à ce propos, voici pour

terminer un théorème sur les triangles orthologiques ; il n'a peut-être point encore été remarqué.

Si deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ *sont doublement orthologiques, ils le sont triplement.*

C'est-à-dire que : si les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont concourantes, ainsi que les perpendiculaires abaissées de B, C, A sur B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, il en sera de même des perpendiculaires abaissées de C, A, B sur les mêmes droites, etc.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1888

Solution par M. Leinekugel, élève au Lycée de Douai.

(*Suite*, voir p. 41.)

On considère la quartique C *lieu des points d'où l'on peut mener, à une conique* E, *deux tangentes faisant un angle donné* α, *et sur cette quartique quatre points situés sur un même cercle. 1° Il existe une conique bitangente à* E *et passant par ces quatre points ; 2° le point de rencontre des tangentes communes à cette conique et à* E *décrit une droite* Δ *fixe, quand deux des quatre points considérés sont fixes ; 3° cette droite* Δ *passe par un point fixe quand l'angle* α *varie, et qne deux des quatre points que l'on considère se déplacent sur une droite fixe* Δ'.

1° En effet, considérons deux points de la quartique A, B, cette droite étant prise comme axe des x et la perpendiculaire au milieu comme axe des y. L'équation de C est

$$(C) \quad K^2[f'(x^2+y^2) + 2d'x + 2e'y + a' + c']^2 = ax^2 + cy^2 + 2bxy + 2dx + 2ey + f,$$

avec les conditions

$$\begin{cases} e - 2e'K^2(a' + c' - f'\rho) = 0 \\ \rho[e - 4K^2e'^2] + \rho - K^2[a' + c' - f'\rho]^2 = 0. \end{cases}$$

$$\left[\rho = \left(\frac{AB}{2}\right)\right].$$

L'équation d'un cercle passant par A, B est

$$C' \quad x^2 + y^2 2\lambda x - \rho = 0.$$

Par l'intersection de C et C', il passe la conique

$$(\Gamma)\quad K^2[2c'y + 2x(d' + f'\gamma) + a' + c' - f'\rho]^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2cy + f.$$

Cette conique Γ passe par les quatre points à distance finie. intersection du cercle C' avec C. De plus, elle est bitangente, à E le long de l'axe radical du cercle orthoptique C'' de E et du cercle C'.

2° Quand le cercle C' varie en passant toujours par A et B, l'axe radical de C' avec C'' passe par un point fixe P situé sur AB; donc le pôle de cette droite (c'est-à-dire la corde des contacts de Γ avec E) décrit une droite fixe Δ, qui est la polaire de ce point P par rapport à E.

3° Quand α_2, et par suite K, varient, le point P se déplace sur CB (ou Δ'), droite fixe A. Conséquemment, sa polaire Δ, par rapport à E, passe par un point fixe δ', pôle de Δ', par rapport à E.

La question qui vient de nous occuper, et les remarques établies plus haut conduisent, en transformant la figure par projetion conique, aux théorèmes suivants.

Théorème I. — *Etant donnée une courbe quelconque du quatrième degré* C *admettant comme points de rebroussement deux points quelconques du plan* I, J, *il existe un réseau infini de coniques* E *qui lui sont tangentes en quatre points et qui sont telles que la droite* IJ *a même pôle* P, *par rapport à toutes ces coniques.*

Théorème II. — *Si l'on considère le réseau infini de coniques admettant toutes une droite et un point fixes comme polaire et pôle, et assujetties de plus à deux conditions simples; l'enveloppe de toutes ces coniques sera une courbe du quatrième ordre, admettant deux points de rebroussement sur la droite fixe.*

Théorème III. — *Etant donnée une droite fixe* D *dans le plan d'une courbe quelconque du quatrième ordre* C, *admettant comme points de rebroussement deux points quelconques* I, J *du plan, il existe trois coniques* E *tangentes à la droite* D, *et tangentes en quatre points, à la courbe* C.

Théorème IV. — *Etant donnée une des coniques* E, *il existe une et une seule conique* E' *passant par les quatre points de contact*

de E *avec* C *et par les deux points de rebroussement de la courbe.*

Théorème V. — *Parmi les systèmes de sécantes communes à deux coniques* E, E′ *associées, le centre de l'un des systèmes est le point fixe* P, *les deux autres centres décrivent la droite* IJ.

Théorème VI. — *Les coniques* E′ *sont toutes bitangentes entre elles aux points* I, J.

En effet les coniques E′ correspondent, dans la projection conique que nous avons faite de la figure relative à la première question proposée, à tous les cercles de Monge de toutes les coniques concentriques tangentes en quatre points à la courbe du quatrième ordre, lieu des sommets des angles de grandeur constante circonscrits à E. Comme ces cercles sont tous concentriques ils sont, par suite, bitangents entre eux à l'infini.

Théorème VII. — *Étant donnée une droite quelconque* D; *et, dans le même plan, une courbe de quatrième ordre* C *quelconque admettant, comme points de rebroussement, deux points quelconques* I, J *du plan; on circonscrit une série de coniques* E″ *au quadrilatère ayant pour sommets* I, J, *et deux des quatre points d'intersection de* D *avec* C. *Outre les six points précédents, communs à* E″ *et à* C, *il existe deux autres points* M, N, *réels ou imaginaires, distincts ou confondus, par lesquels passe une droite réelle qui enveloppe une conique.*

Théorème VIII. — *On considère une courbe quelconque du quatrième ordre, admettant, comme points de rebroussement deux points quelconques* I, J *du plan, et une conique quelconque* E″ *passant par* I, J. *Elle rencontre la courbe* C *en quatre points qui sont tels qu'il existe une conique* E‴ *passant par ces quatre points et bitangente à l'une des coniques* E; *la corde des contacts étant la sécante commune aux coniques* E″, E′ *du système dont* IJ *est l'une des sécantes. (La conique* E′ *étant la conique associée de* E, *c'est-à-dire la conique passant par* IJ, *et par les quatre points de contact de* E *avec* C.)

Théorème IX. — *Quand on considère toutes les coniques* E″, E‴ *qui se coupent en* I, J *et en deux points* M, N, *toutes les droites telles que* MN *sont tangentes à une même conique.*

Théorème X. — *Lorsque les coniques* E″ *varient en passant par deux points fixes de* C, *le point d'intersection des deux tangentes communes, correspondant à la conique fixe* E *et à l'une des coniques du réseau infini des coniques* E‴, *décrit une droite finie* Δ′; *c'est-à-dire que les cordes des contacts de cette conique fixe* E, *avec les coniques* E‴, *passent par un point fixe* Q, *situé sur la droite* D *qui joint les deux points fixes.*

Théorème XI. — *Si l'on suppose que la courbe du quatrième ordre varie en admettant toujours les points* I, J *du plan comme points de recroussement, toutes les droites* Δ′, *définies dans le théorème précédent, passent par un point fixe, pôle de* D *par rapport à* E *et sous les points* Q *décrivent la droite fixe* D.

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Géométrie descriptive, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales, par M. J. Caron. — Un volume de texte et un atlas de figures en deux couleurs. — Paris, librairie Foucart, 45, boulevard Saint-Michel.

Depuis plusieurs années, M. Caron avait fait paraître la partie de son cours de Géométrie descriptive s'adressant aux élèves de Mathématiques élémentaires et aux candidats à l'Ecole de Saint-Cyr. Cette première partie faisait regretter, bien vivement, que la seconde ne fût pas publiée. Cette lacune est aujourd'hui comblée par l'ouvrage que nous allons analyser rapidement.

L'auteur suppose connue la première partie, et fait commencer son livre à l'étude des surfaces. Après avoir défini les surfaces et parlé de leurs propriétés générales, M. Caron étudie les cônes et cylindres, leurs sections planes, et les intersections de surfaces cylindriques et coniques, qu'il rattache, comme cela est naturel, aux intersections de prismes et de pyramides; mais il étudie à fond les particularités de l'intersection des cônes et des cylindres, et surtout les branches infinies.

Ensuite, viennent les surfaces de révolution, avec une étude des surfaces de révolution simples: cône et sphère, et la résolution des trièdres. Un livre spécial étudie les propriétés de la surface gauche de révolution, et se termine par l'étude des surfaces engendrées par la rotation d'une conique, lorsque ces surfaces sont du second degré.

Après avoir développé les questions relatives à l'intersection des deux surfaces de révolution, dont les axes se rencontrent, M. Caron étudie d'une façon toute particulière les problèmes se rattachant aux surfaces du second degré, et donne de très grands dévelopements à l'étude des sur-

faces du deuxième ordre. Aucune des difficultés qui peuvent se présenter aux élèves, dans la limite des programmes, n'a été laissée sans solution.

Nous venons d'indiquer le plan de l'ouvrage. Quant à la méthode suivie par l'auteur, elle se résume en un mot : la rigueur absolue dans les raisonnements. M. Caron n'admet pas de démonstration qui puisse laisser l'ombre d'un doute dans l'esprit des élèves. Avec juste raison, il considère la Géométrie descriptive comme une application de la Géométrie, et cette dernière science ne peut supporter les raisonnements par à peu près. S'adressant à des élèves qui font de la Géométrie analytique, il les renvoie, sans hésiter, aux démonstrations par le calcul, lorsque les démonstrations géométriques ne lui paraissent pas de nature à entraîner la certitude absolue dans l'esprit de ses lecteurs. Ce n'est pas nous qui le blâmerons d'avoir un tel souci de la précision et de l'exactitude.

L'ouvrage, avons-nous dit, est en deux volumes. Tous ceux qui ont fait un peu de Géométrie descriptive apprécieront l'avantage d'avoir devant les yeux, quand on suit une démonstration quelquefois un peu longue, les figures qu'elles comportent, sans être contraint à tourner continuellement les pages, pour passer du texte aux figures.

De plus, s'il est utile pour les élèves de Mathématiques élémentaires de pouvoir, en lisant une épure, distinguer les constructions des données et des résultats, cela est encore plus important dans le programme de Mathématiques spéciales; où les épures se compliquent rapidement. Nous devons donc signaler comme un grand avantage d'avoir un atlas en deux couleurs, permettant de reconnaître immédiatement les lignes de construction, et laissant se détacher nettement sur la figure ce qui est en somme la partie intéressante, la représentation du corps que l'on se proposait d'étudier.

A. Morel.

NOTICE BIOGRAPHIQUE SUR M. KŒHLER

Nous n'avons pu qu'annoncer, dans notre dernier numéro, la mort de M. Kœhler, le fondateur du *Journal de mathématiques spéciales*. Nous tenons à revenir sur la carrière de ce savant modeste et consciencieux, qui n'a vécu que pour le travail et qui a su se concilier l'estime et l'affection de tous ceux qui l'ont connu.

Ancien élève de l'École préparatoire de Sainte-Barbe et de l'École Polytechnique (promotion 1856-1858), il fit la guerre de 1870 comme capitaine du génie, donna sa démission en 1872, et fut nommé, en 1874, répétiteur de mécanique à l'École Polytechnique, poste qu'il dut abandonner bientôt (1878), pour accepter la direction des études à l'École préparatoire

de Sainte-Barbe. C'est à cette époque qu'il succéda à M. Bourget dans la rédaction du *Journal de Mathématiques Élémentaires*. Dès son arrivée, il fit entrer les mathématiques spéciales dans le cadre du Journal et dédoubla bientôt ce recueil en deux parties, lui donnant ainsi la forme qu'il a encore aujourd'hui. Mais sa santé ne lui permit pas de conserver longtemps la direction de l'École préparatoire de Sainte-Barbe, qu'il dut abandonner en 1881; peu après (1882) il quittait le *Journal de Mathématiques*, à la rédaction duquel M. G. de Longchamps venait heureusement d'être associé. Aussitôt rétabli, il se mit au travail, rentra comme répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique en 1886, et fut bientôt nommé examinateur d'admission, d'abord en 1887 à titre de suppléant, puis comme titulaire en 1888. C'était trop de fatigue pour lui : déjà malade à Paris au mois de juillet, ce n'est que par un prodige de volonté qu'il put faire cette tournée de province qui fut pour lui une longue souffrance : ayant à peine la force de parler et de marcher, il faisait bonne contenance aux examens, et les candidats ne pouvaient se douter des efforts qu'il s'imposait et qui pour nous n'étaient que trop visibles. — « Ce n'est que de l'anémie, nous disait-il à Bordeaux, peut-être pour nous rassurer et parce qu'il avait lu notre inquiétude sur notre visage. J'ai besoin d'oxygène; la campagne et le repos me rétabliront. » Hélas ! cet espoir n'a pu se réaliser, il s'était trop fatigué ! Ni le calme, ni l'air, ni des soins dévoués n'ont pu le remettre. Enlevé trop tôt à sa famille et à ses amis, il laisse le souvenir d'un travailleur infatigable, d'un mathématicien érudit, et d'un homme intègre; doué, par dessus tout, de cette bonté native que possèdent si souvent ses compatriotes d'Alsace et dont nous-même nous avons eu des preuves touchantes. Puissent nos regrets apporter quelque consolation à la douleur de sa veuve et de ses enfants, auxquels nous offrons le tribut de notre sympathie !

Nous réunissons ici la liste des articles et ouvrages publiés par M. Kœhler, et qui, la plupart, sont assez récents pour qu'il suffise d'en rappeler le titre à nos lecteurs.

1° *Nouv. Ann. de Math.*, 2e série, t. VI, p. 448. Note sur l'in

tégration de quelques fonctions contenant un radical de second degré. — P. 557, note sur la question 825. — Même série, t. IX, p. 376. Solution de la question 832. — Ibid. t. XI, p. 21, 66, 122. Un important mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre, où les principales propriétés de ces courbes sont retrouvées, en les considérant comme obtenues par un faisceau de coniques reliées anharmoniquement avec un faisceau de droites pivotant autour d'un point. — Ibid., t. XII, p. 186, 187. Solution des questions 1084-1086. — t. XIII, p. 438. Solution de la question 1024. T. XVII, p. 261. Solution d'une question posée par M. Realis.

2° *Bulletin de la Société Mathématique de France*. T. I, p. 27. Sur la construction des courbes du 5e et du 6e, ordre à points multiples. — P. 124. Sur les réseaux de courbes planes. Signalons, en passant, ce curieux théorème, énoncé sans démonstration : « *Un système de courbes du 6e ordre est assujetti à avoir neuf points doubles; huit d'entre eux sont fixes. Le lieu que parconrt le neuvième pour que la courbe soit unicursale, est du 180e ordre.*

3° *J. de Math. Spéciales*. T. II. Nombre des manières de décomposer un polygone en triangles, par des diagonales, p. 325, 327. Théorie des centres des moyennes harmoniques. T. III et IV, six articles. — Note sur les fractions continues, t. IV, p. 217, 223. — Sur les permutations de ces lettres. T. V, p. 32, 33. — Revue sur la résolution de deux problèmes du quatrième degré. T. V, p. 436, 437. Étude sur la forme binaire du 4e degré. Quatre articles dans le t. VI. — En outre, nombreuses solutions, remarques et questions dans divers tomes.

4° Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure à deux et à trois dimensions. Cet excellent ouvrage est devenu classique : il a été apprécié ici-même (1886, p. 43 et 1888 p. 88) par M. de Longchamps, qui en a fait ressortir l'intérêt et la savante conception.

Lucien Lévy.

ECOLE CENTRALE

(SECONDE SESSION)

On donne une ellipse, rapportée à ses axes,

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et, dans son plan, un point P $(p. q)$, par lequel on mène deux droites parallèles aux bissectrices des angles des axes. On considère toutes les coniques passant par les points d'intersection de ces droites avec l'ellipse donnée. Écrire l'équation générale de ces coniques; trouver le lieu de leurs centres et distinguer les portions de cette courbe qui correspondent à des centres d'ellipse ou à des centres d'hyperbole.

On prend la polaire de l'origine des coordonnées par rapport à chacune des coniques et l'on abaisse, de P, une perpendiculaire sur cette polaire. Trouver le lieu des pieds de ces perpendiculaires. Parmi les coniques considérées, se trouvent deux paraboles : trouver leurs foyers pour une position donnée du point P et les lieux de ces foyers lorsque le point P parcourt : 1° une des bissectrices des axes de coordonnées; 2° la circonférence circonscrite au rectangle des axes de cette ellipse.

EXERCICES ÉCRITS

18. — D'un point P, mobile sur une droite Δ, normale à une ellipse, on peut mener, à cette courbe trois normales; soient A, B, C les pieds de ces normales.

On demande :

1° Le lieu décrit par le centre du cercle circonscrit à ABC.

2° Le lieu décrit par l'orthocentre de ABC.

Chacun d'eux est une droite.

Notes sur l'exercice 17 (*).

Nous convenons de désigner, par la lettre φ, un point de l'ellipse dont l'anomalie excentrique est égale à φ.

I. — D'après une généralisation, bien connue, du théorème de Joachimstal si quatre points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ d'une conique, sont sur une hyperbole équilatère, ayant ses symptotes parallèles aux axes de la conique; trois de ces points α, β, γ, et le point $\pi + \delta$ diamétralement opposé au quatrième sont sur un cercle; il reste donc entre les angles excentriques de ces points, la relation :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \pi = 2m\pi,$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (2m - 1)\pi.$$

(*) Cette solution est de M. Balitrand. Nous avons reçu d'autres solutions, très élégantes, de MM. L. Rezeau, conducteur des Ponts et Chaussées à la Roche-sur-Yon; et Guffre, Eugène, maître répétiteur au collège d'Argentan.

II. — Soit δ le point donné. Supposons que β et γ viennent se confondre avec α. La relation (1) devient

$$3\alpha = (2m - 1)\pi - \delta;$$

d'où

$$\alpha = \frac{(2m-1)\pi}{3} - \frac{\delta}{3};$$

On doit prendre toutes les valeurs de α qui fournissent des points différents sur l'ellipse. On obtient ainsi

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{3} - \frac{\delta}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\delta}{3}, \quad \alpha_3 = \pi - \frac{\delta}{3}.$$

Ajoutons, il vient:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \delta = \pi.$$

Soit α le point d'osculation d'une telle hyperbole, et δ le quatrième point où elle rencontre la courbe; soient x, y les coordonnées de α, X, Y celles de δ.

On a

$$\delta = \pi - 3\alpha,$$

d'où

$$\cos\delta = -\cos 3\alpha, \quad \sin\delta = \sin 3\alpha.$$

Par suite :

$$X = -\frac{4x^3}{a^2} + 3x, \quad Y = -\frac{4x^3}{b^2} + 3y.$$

Les équations ne renfermant ni terme en x^2, ni terme en y^2, il en résulte que la somme des trois valeurs de x est nulle ainsi que celle des trois valeurs de y. Par suite, le centre de gravité du triangle coïncide avec le centre de la conique.

Il en résulte, aussi, que les normales aux trois sommets se confondent avec les hauteurs du triangle: elles sont concourantes.

III. — Supposons que les quatre points d'intersection soient confondus en α; la relation (1) devient

$$4\alpha = (2m - 1)\pi;$$

ce qui donne les quatre points:

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{4}, \quad \alpha_4 = \frac{5\pi}{4}.$$

L'équation de la conique sur-osculatrice au point $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$, par exemple, se met facilement sous la forme

$$\frac{xy}{2ab} - \frac{x}{a\sqrt{2}} - \frac{y}{b\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = 0.$$

Les coordonnées du centre sont

$$x = a\sqrt{2},$$
$$y = b\sqrt{2};$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4416-2-9.

ÉTUDE D'UNE COURBE

AUTOUR D'UN POINT SINGULIER

Par M. Lucien **Lévy**.

L'étude d'une courbe autour d'un point singulier présente, comme on sait, le plus grand intérêt au point de vue des applications du calcul intégral, intérêt qui explique l'insistance avec laquelle les candidats à l'École Polytechnique sont interrogés sur ce sujet. La méthode de Puiseux, exposée avec détail dans de nombreux ouvrages classiques (*), permet de résoudre le problème dans tous les cas où il peut être résolu. Elle semble cependant quelque peu artificielle, d'une application inutile dans les cas simples, et quelques professeurs préfèrent encore enseigner des méthodes notoirement insuffisantes, mais dont l'esprit leur paraît plus en harmonie avec les idées auxquelles sont accoutumés leurs élèves. Il nous semble qu'on peut exposer la méthode de Puiseux d'une manière pour ainsi dire plus graduelle, et nous pensons que nos lecteurs liront avec intérêt cet exposé qui renferme d'ailleurs deux procédés de discussion différents.

Nous supposons démontré le théorème suivant :

Dans toute équation, ordonnée par rapport aux puissances ascendantes de x, *si les* p *premiers termes de l'équation, supposée complète, tendent vers zéro,* p *racines de cette équation tendent aussi vers zéro.*

J'aurai aussi fréquemment à remplacer $f(t_1 + \varepsilon)$ par $f(t_1)$, lorsque $f(t_1)$ n'est pas nul; et je rappelle, une fois pour toutes, qu'en opérant ainsi, je néglige un infiniment petit; ε désignant un infiniment petit.

Ceci posé, soit

$$(1)\quad f(x,y) = \varphi_p(x,y) + \varphi_{p+1}(x,y) + \ldots + \varphi_q(x,y) + \ldots + \varphi_r(x,y) + \ldots + \varphi_m(x,y) = 0,$$

l'équation d'une courbe de degré m, passant à l'origine. Les

(*) Voir par exemple : G. de Longchamps, *Supplément;* Pruvost, *Géo. analytique*; Picquet, *Géo. analytique;* Laurent, *Cours d'analyse*, etc.

polynômes φ désignent des fonctions entières, homogènes, d'un degré égal à leur indice. De plus, $p < q < r$.

Toute sécante passant à l'origine et représentée par

$$(2) \qquad y = tx,$$

coupe la courbe en p points confondus à l'origine et en $m - p$ autres points dont les abscisses sont données par l'équation

$$(3) \qquad \varphi_p(1,t) + x\varphi_{p+1}(1,t) + \ldots + x^{q-p}\varphi_q(1,t) + \ldots + x^{m-p}\varphi_m(1,t) = 0;$$

Pour que la sécante devienne tangente, il est nécessaire et suffisant qu'une racine de cette équation soit nulle, c'est-à-dire que

$$(4) \qquad \varphi_p(1,t) = 0.$$

Les racines de cette équation feront connaître les coefficients angulaires des tangentes à l'origine; et la question qui se pose est de savoir si, à chaque tangente, correspond effectivement une branche de courbe. Toute branche réelle de courbe qui passe à l'origine y a évidemment une tangente réelle : donc à une tangente imaginaire ne correspondra jamais une branche réelle (la démonstration algébrique se ferait d'ailleurs par la méthode même que nous allons employer). Nous nous bornerons aux tangentes à coefficients réels.

Posons

$$\varphi_p(1,t) = A(t-t_1)(t-t_2)\times\ldots(t-t')^2(t-t_1')^2\times\ldots(t-t'')^3\times\ldots\psi_p(t).$$

A est une constante, t_1, t_2... sont des racines simples, t', t_1'... des racines doubles, t'', t_1''... des racines triples, et ainsi de suite. Enfin, $\psi_p(t)$ est le produit des facteurs correspondant aux racines imaginaires.

Étude des racines simples. — Pour étudier la courbe dans le voisinage de la tangente

$$y = t_1x,$$

je vais la couper par une sécante infiniment voisine

$$y = (t_1 + \varepsilon)x,$$

ε étant un infiniment petit. En remplaçant t par $t_1 + \varepsilon$, dans l'équation (3), on obtient une équation en x qui admet au moins une racine infiniment petite, et qui en admettra davantage, si quelques-uns des polynômes φ, qui suivent le premier, s'annulent pour $t = t_1$. Soit $\varphi_q(1, t)$ le premier de ces polynô-

mes, non divisible par $t - t_1$; désignons par $\Phi(t)$ le produit de tous les facteurs qui composent $\varphi_p(1, t)$ à l'exception du facteur $t - t_1$. Cette équation s'écrira, en négligeant des termes infiniment petits par rapport à ceux qui sont conservés,

$$(5) \qquad \varepsilon\Phi(t_1) + x^{q-p}\varphi_q(1, t_1) = 0.$$

Insistons sur la formation de cette équation qui est l'équation capitale dans cette théorie : les termes compris entre φ_p et φ_q doivent être négligés, car ils contiennent $t - t_1 = \varepsilon$, en facteur et sont multipliés par une puissance de x qui est un infiniment petit, puisque nous étudions seulement les racines infiniment petites de l'équation proposée. De même, les termes qui suivent $x^{q-p}\varphi_q$ sont infiniment petits par rapport à celui-ci : enfin, en remplaçant $\Phi(t_1 + \varepsilon)$ et $\varphi_q(1, t_1 + \varepsilon)$ par $\Phi(t_1)$ et $\varphi_q(1, t_1)$, nous négligeons des infiniment petits qui, multipliés par ε, ou par x^{q-p}, donnent des termes infiniment petits par rapport à ceux qui sont conservés.

Cela posé l'équation (5) peut s'écrire

$$x^{q-p} = C\varepsilon$$

en désignant par C la fraction $\frac{\Phi(t_1)}{-\varphi_q(1, t_1)}$, laquelle est une constante.

Soit $C > 0$, $q - p$ impair. Alors, à toute valeur de ε, correspondra une seule valeur de x, réelle et du signe de ε, d'où la disposition ci-contre (*fig. 1*) :

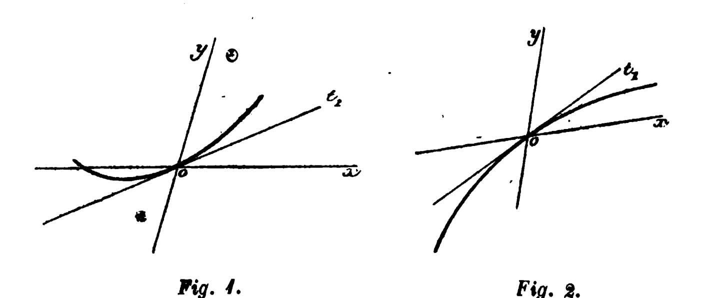


Fig. 1. *Fig. 2.*

Soit $C < 0$, $q - p$ impair. A toute valeur de ε, correspondra une seule valeur de x réelle et du signe contraire à celui de ε (*fig. 2*).

Soit $C > 0$, $q - p$ pair : il faut alors ne donner à ε que des valeurs positives. A chacune de ces valeurs, correspondent deux valeurs de x, de signes contraires ; la courbe traverse sa tangente (*fig. 3*).

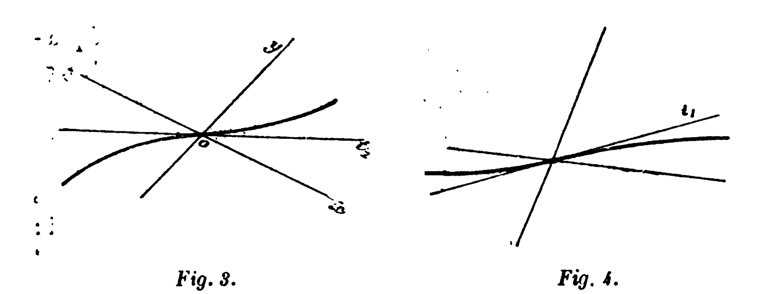


Fig. 3. *Fig. 4.*

Soit $C < 0$, $q - p$ pair. On ne doit donner à ε que des valeurs négatives. Pour chacune, on obtient deux valeurs de x, de signes contraires ; la courbe traverse encore sa tangente (*fig. 4*).

Corollaire I. — Si $p = 1$, le point est dit *simple*. La courbe y passe toujours par une branche effective.

Corollaire II. — Si $p = 2$, le point est dit *double*. Si les racines de $\varphi_2(1, t) = 0$ sont imaginaires, le point est dit *isolé*. Si elles sont réelles et distinctes, le point est un point double effectif et il s'y croise deux branches affectant chacune une des formes indiquées dans les quatre figures précédentes. Nous parlerons plus loin du cas où les deux racines sont égales.

Étude des racines doubles. — Nous allons couper la courbe par la sécante

$$y = (t' + \varepsilon)\, x$$

qui a pour limite la tangente

$$y = t'x.$$

Désignons par $\Phi_1(t')$ le produit des facteurs qui composent $\varphi_p(1, t)$, à l'exception du facteur double $(t - t')^2$. Soit aussi $\varphi_q(1, t)$, le premier des polynômes φ qui, s'annulant pour $t = t_1$,

ne sont pas divisibles par $(t - t_1)^2$, $\varphi_r(1, t)$ le premier de ces polynômes φ, non divisible par $t - t_1$.

L'équation (3) pourra s'écrire ici, en y remplaçant t par $t' + \varepsilon$ et en n'écrivant pas les termes infiniment petits par rapport à ceux qui sont conservés :

$$(6) \qquad \varepsilon^2\Phi_1(t') + \varepsilon x^{q-p}\psi_1(t') + x^{r-p}\varphi_r(1, t') = 0.$$

Remarquons ici que nous avons dû conserver le terme du milieu, parce que l'ordre de x par rapport à ε n'est pas déterminé ; nous avons aussi écrit $\varepsilon\psi_1(t')$, au lieu de $\varphi_q(1, t')$, pour mettre en évidence le facteur $\psi_1(t')$ qui ne s'annule pas. Il est d'ailleurs manifeste que ce terme ne devrait pas être écrit si l'on avait $q > r$.

Dans l'équation (6), les termes sont infiniment grands par rapport à ceux qu'on a négligés; mais rien ne prouve qu'ils soient de même ordre. On sait seulement qu'il doit y avoir, dans toute équation entre infiniment petits, deux termes au moins de l'ordre moindre. Si l'équation (6) renferme seulement deux termes du même ordre, le troisième sera d'ordre supérieur et devra être négligé; d'où plusieurs groupements possibles, à chacun desquels correspondront un certain nombre des $r - p$ racines infiniment petites. Nous allons les examiner successivement. *(A suivre.)*

SUR LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT

Par M. **C. A. Laisant**, Docteur ès sciences.

PRÉLIMINAIRES

En 1887, j'ai publié dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XV, p. 42) une Note ayant pour titre *Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations*. Le théorème dont il s'agit, et qui est assez généralement dénommé *Théorème de D'Alembert*, consiste en cette proposition, que toute équation $f(x) = 0$, $f(x)$ étant un polynôme entier, à coefficients réels ou imaginaires, a une racine réelle ou imaginaire.

La plupart des démonstrations connues jusqu'ici, celle de Cauchy en particulier, ont donné lieu à des objections ; une autre démonstration, purement analytique et irréprochable, due à M. Walecki, présente une grande complication.

Bref, le théorème en question, après avoir figuré pendant plusieurs années dans les cours de Mathématiques spéciales et dans le programme d'admission à l'École Polytechnique, en a été proscrit. Il est indiqué qu'on doit l'admettre comme postulatum.

On ne saurait méconnaître qu'il y a là une lacune profondément regrettable, dans notre enseignement actuel; le théorème de D'Alembert prend place dès le début de la théorie des équations ; il exprime une vérité qui est loin d'être évidente par elle-même, et qui ne saurait, en aucune mesure, relever de l'observation directe des faits, comme par exemple les principes généraux de la Mécanique. Passer sous silence la démonstration, c'est donc jeter une sorte de doute dans l'esprit des élèves ; j'en ai vu me demander pourquoi l'on n'admettrait pas au même titre, sans démonstration, le théorème de Rolle, ou celui de Sturm.

En réalité, la seule cause qui puisse justifier cette lacune, c'est l'absence de rigueur, ou l'absence de simplicité des démonstrations, comme nous l'avons rappelé plus haut. Si donc une démonstration réellement simple et tout à fait inattaquable intervenait, on se demande s'il serait possible de laisser subsister dans les programmes l'imperfection que nous venons de signaler.

C'est cette démonstration dont nous avons indiqué la substance dans la Note rappelée au début. Il nous a semblé utile, pour la faire connaître plus complètement du public mathémathique, de profiter de l'hospitalité que veut bien nous offrir le *Journal de Mathématiques spéciales*.

J'accompagnerai ici la démonstration de tous les développements nécessaires, de manière à la rendre accessible aux élèves de force moyenne ; et je donnerai, de la sorte, à ceux qui me liront, quand même les programmes ne devraient pas être modifiés sur ce point, la possibilité d'entrevoir la succession non interrompue des vérités, qui seule donne à toute étude

un caractère scientifique et philosophique, et qui nous paraît aussi nécessaire dans la théorie des équations que dans les autres branches des Mathématiques.

REPRÉSENTATION DES IMAGINAIRES

1. — Je rappellerai que toute quantité imaginaire, de la forme $p + qi$, peut être représentée sur un plan, soit par un point M ayant pour coordonnées rectangulaires p et q (p pour abscisse et q pour ordonnée), soit, plus naturellement, par la droite OM qui joint l'origine au point M. La longueur OM est le *module* $\sqrt{p^2 + q^2} = r$ de $p + qi$; l'inclinaison de OM, ou l'angle ZOM que forme cette droite avec l'axe des abscisses OZ, en est l'*argument* θ; enfin $p + qi$ peut aussi s'écrire sous la forme $re^{i\theta}$.

2. — On sait, également, que toutes les opérations (additions soustractions, multiplications, divisions, élévations aux puissances entières) que l'on peut effectuer sur des imaginaires, conduisent à des résultats de même forme.

Par conséquent, si $y = f(x)$ est un polynôme

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x + a_m,$$

et si l'on donne à x une valeur imaginaire quelconque représentée par OX, le polynôme $f(x)$ prendra une valeur unique correspondante qui sera représenté par OY, Y étant un certain point du plan.

CONTINUITÉ DE LA FONCTION y

3. — Les dérivées successives $f'(x), f''(x), \dots f^m(x)$, de $f(x)$, prennent des valeurs évidemment finies, pour une valeur finie quelconque de x. Au delà de l'indice m, les dérivées sont identiquement nulles. La formule de Taylor est donc applicable à cette fonction y, et nous donne, en appelant h un accroissement quelconque donné à x, et k l'accroissement correspondant de y:

$$k = hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots + \frac{h^m}{m!}f^m(x).$$

Si le module de h tend vers zéro, le module de k tend donc aussi vers zéro. En d'autres termes, si nous déplaçons le point X

sur le plan, d'une manière quelconque, suivant XX_1, nous pouvons donner à ce déplacement une longueur assez petite pour que le déplacement correspondant YY_1 soit lui-même plus petit que toute longueur donnée.

En d'autres termes, si le point X subit un déplacement continu suivant une ligne quelconque, Y subira, de son côté, un déplacement continu suivant une certaine ligne.

On remarquera, par surcroît, que la limite de $\frac{k}{h}$, pour $h = 0$, étant précisément $f'(x) = ma_0x^{m-1}$, quantité qui dépend seulement de la position du point X, et nullement de son déplacement, l'angle formé par ces déplacements infiniment petits k et h, est constant. Par conséquent, si X parcourt d'abord une ligne XX_1, puis une ligne XX_2, le point Y parcourra les lignes correspondantes YY_1 et YY_2 ; et l'angle des tangentes en Y, à ces deux courbes, sera égal à l'angle des tangentes en X aux courbes XX_1, XX_2.

DÉMONSTRATION D'UN LEMME

4. — *Lorsque le point* X *décrit, autour de l'origine comme centre, une circonférence dont le rayon est suffisamment grand, le point* Y *décrit, autour de l'origine, une courbe fermée, aussi éloignée de l'origine qu'on le voudra, dans toutes ses parties.*

En supposant $a_0 = 1$, [ce qui ne diminue en rien la généralité de la proposition, puisqu'il suffit de diviser la fonction par une quantité constante et finie, pour qu'il en soit ainsi] nous pouvons écrire y sous la forme

$$y = x^m\left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{a_m}{x^m}\right),$$

ou

$$(1) \qquad y = r^m e^{im\theta}\left(1 + \frac{a_1}{r} e^{-i\theta} + \frac{a_2}{r^2} e^{-2i\theta} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{r^{m-1}} e^{-(m-1)i\theta} + \frac{a_m}{r^m} e^{-mi\theta}\right),$$

n appelant r le module et θ l'argument de x.

D'après cela, si r augmente indéfiniment, il en est de même du module de y. En outre, pour une valeur déterminée de θ,

l'argument de y tend vers $m\theta$, lorsque r augmente sans limite, puisque le facteur entre parenthèses tend vers l'unité.

A toute direction OX, d'inclinaison θ, correspondra donc, pour OY, une direction dont l'inclinaison sera aussi rapprochée de θ qu'on le voudra, pourvu que la longueur de OX, ou r, soit suffisamment grande. Il y aura ainsi une droite OY, dans une direction quelconque, quand le point X parcourant une circonférence de centre O, la droite OX prendra successivement toutes les directions.

D'ailleurs, y ne pouvant prendre qu'une seule valeur, pour une valeur déterminée de r, lorsque le point mobile X revient à son point de départ, le point Y reviendra également au sien; il a donc décrit une courbe fermée.

Le lemme se trouve ainsi établi.

Il est bon de noter que, si X parcourt une seule fois une circonférence de grand rayon, le point Y tourne autour de l'origine, en faisant m circonvolutions, puisque l'argument de y est indéfiniment approché de $m\theta$.

THÉORÈME

5. — *L'équation* $y = 0$ *a une racine.*

Si l'on fait $x = 0$, on a $y_0 = a_m$.

Soit OA_m la droite quireprésente cette quantité a_m, et supposons que X décrive autour de l'origine, une circonférence de rayon très petit. Il est évident que Y décrira, autour du point A_m, une courbe fermée très petite, et aussi rapprochée qu'on le voudra de ce point A_m, avec lequel elle vient se confondre à la limite, lorsqu'on suppose que le rayon OX tend vers zéro.

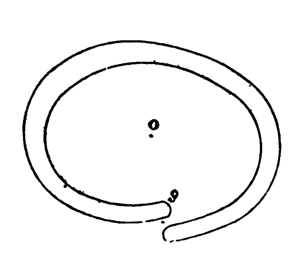
Supposons maintenant que cette circonférence de rayon OX, d'abord très petite, se dilate progressivement, d'une manière continue, de manière à devenir aussi grande que nous voudrons, en conservant toujours le point O pour centre. La courbe fermée se dilatera de même, d'une manière continue; et, à un certain instant, d'après le lemme du numéro précédent, elle sera aussi éloignée de O qu'on le voudra, dans toutes ses parties. L'origine O lui sera alors intérieure; or ce point était

évidemment extérieur, au début, alors que la courbe décrite autour de A_m était très petite. Par conséquent, dans l'intervalle, la courbe Y, en se dilatant, a nécessairement passé par l'origine, en vertu de la continuité établie au n° 3.

On a donc eu $y = o$, pour une certaine valeur de x; ce qui démontre le théorème de D'Alembert.

RÉFUTATION D'UNE OBJECTION POSSIBLE

6. — Une objection, plutôt spécieuse que fondée, qui pourrait être faite à la démonstration qui précède, consisterait à se demander si la courbe décrite par Y lorsque X décrit une très grande circonférence, ne serait pas, dans certains cas, d'une forme analogue à la figure ci-contre, c'est-à-dire ne présenterait pas, en δ, une sorte de détroit par lequel pourrait passer l'origine dans le mouvement de dilatation progressive de la courbe.



Il faudrait pour cela, comme on le voit, que, dans une certaine région tout au moins, l'argument de y pût décroître quand l'argument de x croîtrait.

Or, si nous désignons par t le module de y et par φ son argument, nous pouvons écrire y sous la forme

$$te^{i\varphi} = r^m e^{im\theta}\left(1 + \frac{k}{r}\right),$$

k désignant une quantité finie. Lorsque r croît sans limite, y tend vers $r^m e^{im\theta}$; par suite la limite de l'argument φ est $m\theta$. Lorsque r est fini, on peut donc écrire

$$\varphi = m\theta + \frac{\alpha}{r},$$

α étant une quantité variable, mais finie.

Prenant les dérivées des deux membres, par rapport à θ, en traitant r comme constant, puisque X décrit une circonférence de centre O, nous avons

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = m + \frac{1}{r}\,\frac{d\alpha}{d\theta}.$$

Donc, pour une valeur de r suffisamment grande, $\frac{d\varphi}{d\theta}$ finira par devenir constamment positif; par conséquent la courbe fermée, décrite par Y, ne pourra par présenter la forme indiquée plus haut.

REMARQUE FINALE

7. — Le théorème de D'Alembert se trouve donc établi en toute rigueur, par des considérations empruntées à l'idée même de continuité, et de l'ordre le plus simple. La continuité d'une fonction entière est démontrée aussi, chose d'ailleurs très facile.

On remarquera toute l'analogie qui existe entre l'esprit de cette démonstration et la proposition en vertu de laquelle une fonction continue *réelle* devient nulle pour une valeur de la pariable x comprise entre a et b, si les valeurs de la fonction, pour $x = a$ et $x = b$, sont de signes contraires.

Le langage géométrique employé ci-dessus n'enlève donc rien à la rigueur analytique des raisonnements.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE

Par M. **Emile Vigarié.**

(Suite et fin, voir p. 55.)

---

101. Hyperbole de Jerabek (Γ'). — C'est la transformée par points inverses de la droite d'Euler (*). Elle a pour équation :

$$\sum \frac{b^2 - c^2}{x} \cos A = 0, \qquad \text{ou} \sum \frac{(b^2 - c^2)\sin 2A}{\alpha} = 0.$$

Cette hyperbole est le lieu des centres de perspective de ABC

(*) Voir J. Neuberg. — *Sur l'Hyperbole* Γ', *inverse de la droite d'Euler* (M. 1888, t. VIII, p. 81-88).

et d'un triangle dont les sommets sont sur les symédianes de ABC, et dont les côtés sont parallèles aux interhauteurs. L'enveloppe des axes de perspective est la ***Parabole de Kiepert.***

102. Parabole de Artzt. — *Premier Groupe.* Soient α, β, γ des points qui divisent les côtés de ABC dans le même rapport; de telle sorte que :

$$\frac{B\alpha}{BC} = \frac{C\beta}{CA} = \frac{A\gamma}{AB} = \lambda.$$

Tout triangle $\alpha\beta\gamma$ a même angle de Brocard que ABC; il est, d'ailleurs, perspectif avec le premier triangle de Brocard. Le centre de perspective appartient au cercle de Brocard, les enveloppes des côtés des triangles $\alpha\beta\gamma$ sont trois coniques qui forment le *premier groupe des paraboles de Artzt.* Ces paraboles sont tangentes à deux côtés des triangles aux extrémités du troisième, elles ont pour foyers les sommets du second triangle de Brocard (*). Ces coniques ont pour équations :

$$a^2x - 4bcyz = 0,$$
$$b^2y - 4axz = 0,$$
$$c^2z - 4cxy = 0.$$

Second groupe. — Ce sont les enveloppes des côtés des triangles de Kiepert. Elles ont pour foyers les médianes de ABC, et elles sont inscrites à un quadrilatère formé par les deux bissectrices issues d'un sommet et les médiatrices des côtés aboutissant à ce sommet. La parabole correspondant au sommet A a pour équation :

$$[(cy - bz)\cos A - ax]^2 = (b^2 - c^2)(y^2 - z^2)\sin^2 A.$$

On a des formules analogues pour les deux autres enveloppes.

103. Paraboles de Brocard. — Il y a deux groupes de trois paraboles: ce sont les anticomplémentaires des paraboles de Artzt (**).

(*) Voir Artzt. — *Programme scolaire du Gymnase de Recklinghausen*, 1884. Lemoine — *Mathésis*, t. IV, 1884. Question 350, p. 143.
P. Barbarin. — *Mathésis*, t. IV, 1884. Question 341, p. 142.
H. Brocard. — *Propriétés de l'Hyperbole des neuf points et de six paraboles remarquables* (J. S. 1885 pp. 12, 30, 58, 76, 104, 123).

(**) Voir H. Brocard. — *Mémoires de l'Académie de Montpellier. Section des Sciences*, 1886.

104. Potentielle triangulaire. — Nous avons déjà signalé cette courbe (J. S. 1887, p. 80) dans cette étude (§ **17**); nous n'y reviendrons pas.

105. Coniques centralement associées. — Étant donné un point M, les droites AM, BM, CM rencontrent les côtés du triangle aux points M′, M″, M‴; il existe une conique ayant (M) pour centre et passant par M′, M″, M‴. *La conique* (M) *est centralement associée au point* M (*). La conique M, correspondant au point M (α_0 β_0 γ_0), est représentée par

$$\sum \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2}(\beta_0 + \gamma_0 - \alpha_0) - 2\sum \gamma_0 \frac{\beta\alpha}{\beta_0\alpha_0} = 0.$$

Elle est doublement tangente à la conique (μ), dont l'équation est :

$$\Sigma\alpha^2(\beta_0 - \gamma_0 - \alpha_0) - 2\Sigma\alpha\beta(\beta_0 + \gamma_0 - \alpha_0)(\alpha_0 + \gamma_0 - \beta_0) = 0.$$

106. Conique (I). — C'est la conique centralement associée au centre du cercle inscrit I. C'est la transformée, par points supplémentaires, du cercle circonscrit; elle a pour équation

$$\Sigma a(z + x - y)(x + y - z) = 0.$$

107. Cubique des dix-sept points. — Elle passe par les dix-sept points suivants :

Les sommets du triangle, les milieux des côtés, les milieux des hauteurs, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit O, l'orthocentre H, le point de Lemoine et les centres de cercles tangents aux côtés (**). Elle a pour équation :

$$bcx(y^2 - z^2) + cay(z^2 - x^2) + abz(x^2 - y^2) = 0.$$

(*) Pour l'étude des coniques centralement associées et de la conique (I) voir :

G. de Longchamps. — *Une conique remarquable du plan du triangle* (A. F. Nancy 1886).

(**) Consulter sur ce sujet :

Thomson. — *E. T.* août 1864; *N. A. M.* 1865; pp. 144, 469.

Kœhler. — *Exercices de Géométrie analytique*, 1886, p. 195-196; *Sur une cubique remarquable du plan du triangle* (J. S., août 1887, p. 169-175).

M. Lemoine, au congrès d'Oran (Voyez l'*Annuaire de l'Association Française;* 1888, p. 171), a donné quelques nouvelles propriétés de cette courbe et a indiqué d'autres points par lesquels passe la cubique.

Nous avons résumé jusqu'ici les faits principaux intéressant la Géométrie du triangle. Pour être complet, il nous faudrait encore parler de points et de courbes signalés plus récemment, et dont l'importance est notable. Mais nous ne pourrions le faire sans allonger démesurément ce travail, déjà fort étendu.

Nous ajouterons simplement que la Géométrie du triangle a été généralisée dans certains polygones (*), et qu'elle s'est même étendue à l'espace (**). Nous reviendrons, plus tard, sur cette extension.

En terminant, nous prions MM. Brocard, Lemoine, de Longchamps et Neuberg de vouloir bien agréer nos plus vifs remerciements pour les utiles conseils qu'ils nous ont donné, et pour les obligeantes communications qu'ils ont bien voulu nous faire.

E. VIGARIÉ.

NOTA. — Malgré tout le soin que nous avons apporté dans la Rédaction de cette étude, notre travail contient peut-être des erreurs ou des omissions; nous serons reconnaissant aux lecteurs qui voudront bien nous les signaler.

E. V.

(*) Voir :

J. Casey. — *On the Harmonic Hexagon of a triangle* (*Proceedings of the Royal Irish Academy*, 26 janvier 1886).

R. Tucker. — *Some properties of a Quadrilateral in a circle, the rectangles under whose opposite sides are equal* (P. L vol. XVI).

J. Neuberg. — *Sur le Quadrilatère harmonique* (M. tome V, 1885).

G. Tarry. — *Sur les figures semblablement associées* (M. tome VI, 1886).

T. C. Simmons. — *A New Method for the Investigation of harmonic polygons* (P. L. vol. XVIII, n° 298, 7 avril 1887).

(**) J. Neuberg. — *Mémoire sur le tétraèdre*, §§ 28-31, 40-44 (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique 72 pages, 1884.

J. Neuberg et G. Tarry. — *Sur les polygones et les polyèdres harmoniques* (A. F. Nancy, 1885).

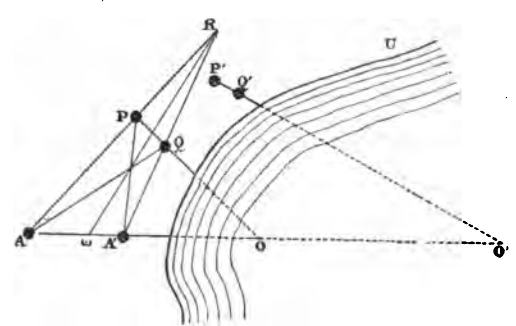
VARIÉTÉS

QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE

(*Suite*, voir p. 30.)

8. Détermination de la base hydraulique ou base d'essai. — Pour faire l'expérience de la vitesse des bâtiments à vapeur, on détermine la longueur d'une base OO′, dans les conditions suivantes.

Deux points A, A′ (balises, clochers, sémaphores, etc.), définissent la route rectiligne que doit suivre le bâtiment. D'autre part, sur la terre ferme, quatre points, P, Q, P′, Q′, désignés d'avance, servent à fixer la situation de la base d'essai OO′. On relève les heures où le navire, ayant atteint son maximum de vitesse, passe : 1° en O, point en ligne droite avec P, Q ; 2° en O′, point d'intersection de P′Q′ et de AA′. Pour calculer la vitesse cherchée, il reste seulement à connaître la longueur de OO′. On sait que cette distance, comme il est ordinaire de le faire dans les problèmes du même genre, s'obtient par un calcul trigonométrique ; les éléments nécessaires à ce calcul étant fournis par des observations angulaires convenables, faite aux extrémités d'une base de longueur connue.



Nous voulons montrer comment, par de simples chaînages, on peut résoudre le problème en question. Peut-être, en raison de certaines difficultés d'ordre matériel, la solution actuelle

offre-t-elle des impossibilités pratiques? Nous la présentons, néanmoins, pour qu'on puisse la juger. Nous indiquerons, d'ailleurs, à la suite, deux solutions notablement plus simples.

Imaginons, par exemple, que l'espace U représente une plage de sable, sur laquelle, au moyen de grands piquets, on puisse aisément déterminer les jalonnements qu'indique la figure.

Nous obtenons ainsi, sur AA', un certain point ω et, par une propriété connue, nous pouvons écrire

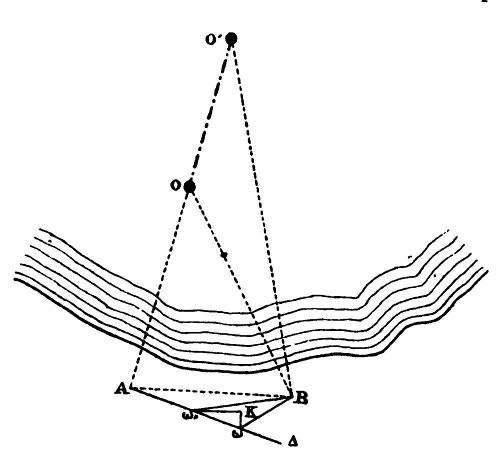
$$\frac{2}{AA'} = \frac{1}{A\omega} + \frac{1}{AO}.$$

Cette égalité permet de calculer AO.

En opérant avec P' et Q', comme nous l'avons fait avec P et Q, nous calculerons de même, AO'; la différence AO' — AO, des nombres ainsi obtenus, donne la longueur de la base d'essai OO'.

On observera qu'en déplaçant les points Q et Q', on peut obtenir une base aussi grande que l'on voudra et dont les extrémités O, O' pourront être, de la sorte, arbitrairement choisies.

Deuxième Solution. — Cette solution repose sur une transformation des figures que nous avons précédemment indiquée (§ **78**); elle est particulièrement appropriée au cas où la base d'essai, prolongée, pénètre dans la partie du rivage d'où l'on peut apercevoir les bouées O, O' qui représentent les extrémités de la base d'essai.



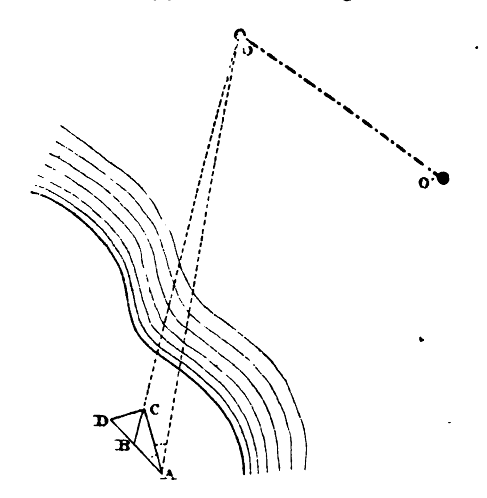
Soit A un point pris sur le prolongement de OO'; par A, on

jalonne une droite AB, oblique sur OO′ et une autre droite Δ, perpendiculaire à OO′; puis, par le point B, on trace des perpendiculaires aux lignes de visée BO, BO′; on obtient ainsi, sur Δ, les points ω, ω′. Ayant mené ω′K, parallèle à AB; ω K, perpendiculaire à AB, on a, comme nous l'avons démontré au paragraphe cité,

$$OO' = \omega\omega' . \frac{\omega' K}{\omega K}.$$

Dans cette opération, la difficulté principale consiste à déterminer les lignes de visée allant, de B, aux bouées O, O′, lesquelles sont toujours assez éloignées. Nous indiquerons, au paragraphe suivant, une méthode qui permet de la résoudre.

Troisième Solution. — Nous supposons encore que la base d'essai soit déterminée par deux bouées visibles du point A et de la région voisine. Prenons, dans cette région, un autre point C et traçons AD de telle sorte que DAC = CAO; élevons ensuite CD perpendiculairement à AC, nous avons (§ **111**):

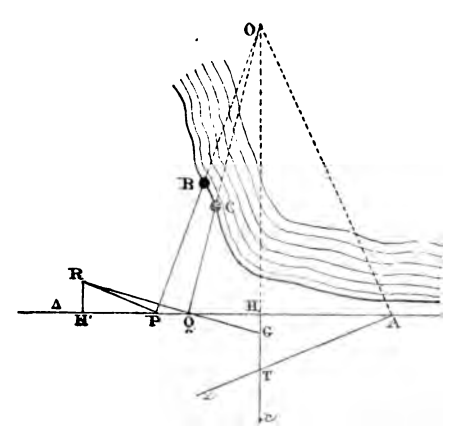


$$\frac{1}{AO} = \frac{2}{AD} - \frac{1}{AB}.$$

On calculera de même AO′. Finalement, on connaîtra, dans le triangle AOO′, les longueurs des côtés AO, AO′ et la valeur de l'angle OAO′; de ces données, on pourra déduire OO′.

9. La visée sur la bouée invisible. — Soit O la bouée en question; nous la supposons invisible, du point A, et, dans ces conditions, on propose de déterminer la ligne Az qui est perpendiculaire à la direction AO; AZ étant connu, la ligne de visée AO se trouvera, par cela même, déterminée.

Jalonnons une droite indéfinie Δ, passant par A ; la bouée O est visible, nous le supposerons, de deux points particuliers B, C, pris sur le rivage ; les prolongements des lignes de visée BO, CO, rencontrent Δ en P, Q. En ces points, élevons des perpendiculaires aux lignes PB, QC ; soit R leur point de rencontre. Comme nous l'avons précédemment observé, R, O se projettent sur Δ en H, H′, points isotomiques sur PQ.



D'après cela, nous pourrons prendre QH = PH′ et, en ce point H, élever Hx perpendiculaire sur Δ. Prolongeons RQ jusqu'à sa rencontre en G avec Hx et soit T le point d'intersection des droites Az, Hx.

Nous avons, d'après cette construction,

$$\overline{QH}^2 = HG.HO, \quad \text{et} \quad \overline{AH}^2 = HT.HO.$$

d'où

$$HT = \frac{\overline{AH}^2.HG}{\overline{QH}^2}.$$

Cette égalité permet de calculer HT ; le point T étant connu, Az est déterminé. *(A suivre.)*

QUESTIONS RESOLUES

---

1. — *On donne une conique* Γ *et deux points fixes* P, Q. *Sur* P *on trace une transversale coupant* Γ *en* A *et* B ; *les droites* QA, QB *coupent* Γ *en deux autres points* C, D.

Démontrer que CD *passe par un point fixe.*

Prenons pour axes de coordonnées deux droites quelconques passant par Q et soit $f = o$, l'équation de Γ.

L'équation du faisceau QA, QB étant

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

l'ensemble des droites AB, CD sera représenté par

$$\lambda(ax^2 + bxy + cy^2) + f = 0.$$

Soient

$$mx + ny + p = 0, \qquad m'x + n'y + p' = 0$$

les équations de AB et de CD; l'identité

$$\lambda(ax^2 + bxy + cy^2) + f \equiv (mx + ny + p)(m'x + n'y + p')$$

donne

$$\text{(H)} \qquad \left.\begin{aligned} mp' + m'p &= h, \\ np' + pn' &= h', \\ pp' &= h''; \end{aligned}\right\}$$

h, h' désignant les coefficients des termes en x, y, dans f; h'' est le terme indépendant de x et de y dans cette même forme f. On observera que h, h', h'' sont des coefficients constants.

Si l'on suppose que AB passe par un point fixe α, β; on a

$$\text{(H')} \qquad m\alpha + n\beta + p = 0.$$

En éliminant m, n, p entre les équations (H), (H'), on a

$$p'(\alpha h + \beta h' + h'') = m'\alpha h'' + n'\beta h''.$$

En portant cette valeur de p' dans l'équation de CD, on voit que cette droite passe par un point fixe dont les coordonnées sont

$$x_1(\alpha h + \beta h' + h'') + \alpha h' = 0,$$
$$y_1(\alpha h + \beta h' + h'') + \beta h'' = 0.$$

2. — *Conditions pour que* $(x + 1)^m - x^m - 1$ *soit divisible par* $x - \alpha$ *et par* $x - \alpha^2$; α, α^2 *désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité.*

Cette question est très connue (*). On observe que

$$(x - \alpha)(x - \alpha^2) \equiv x^2 + x + 1.$$

D'après cela, si α est racine de l'équation

$$(x + 1)^m - x^m - 1 = 0,$$

alors, l'imaginaire conjuguée α^2 est aussi racine de cette équation.

La condition est donc

$$(1) \qquad (\alpha + 1)^m - \alpha^m - 1 = 0,$$

(*) Voyez *Nouvelles Annales*, 1861, p. 9.

ou
$$(-1)^m \alpha^{2m} - \alpha^m - 1 = 0.$$

On suppose, successivement,
$$m = 6p, \quad m = 6p \pm 1, \quad m = 6p \pm 2, \quad m = 6p + 3,$$
et l'on vérifie que l'égalité (1) ne peut avoir lieu que dans la seconde hypothèse.

EXERCICES ÉCRITS

19. — On considère une parabole P, rapportée à ses axes. D'un point M, on peut abaisser trois normales sur cette courbe ; soient A, B, C les pieds de ces normales. Ces droites rencontrent l'axe de P en des points A′, B′, C′ ; on suppose que B′ est le milieu de A′C′.

1° Trouver le lieu du point M. Ce lieu est une développée de parabole.

2° En appelant x_0, y_0 les coordonnés de M, et après avoir posé
$$\theta = \frac{2}{3}\,\frac{x_0 - p_0}{y_0},$$
calculer les coordonnées x_1, y_1 du point B, et l'équation de AC.

3° Trouver l'enveloppe de AC. Cette enveloppe est une parabole.

4° AC rencontre la tangente, en B, en un point I ; le lieu de I est la tangente au sommet de la parabole proposée.

5° Sur A′C′ comme diamètre on décrit un cercle ; trouver l'enveloppe de ce cercle.

Cette enveloppe est constituée par un système de deux droites.

Notes sur l'exercice 18.

Soit D (x_1, y_1) les coordonnées du pied de la normale considérée Δ ; le cercle circonscrit Γ au triangle ABC (*Cours de Mathématiques spéciales* ; (t. II, p. 402) a pour équation
$$x^2 + y^2 + xx_1 + yy_1 = u\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + 1\right),$$
si l'on a posé
$$u = a^2 + \frac{b^2\beta}{y_1} = b^2 + \frac{a^2\alpha}{x_1},$$
formules dans lesquelles α, β désignent les coordonnées du point P.

Cela posé : 1° Les coordonnées du centre ω de Γ, sont données par les égalités

$$2x + x_1 = u\frac{x_1}{a^2},$$

$$2y + y_1 = u\frac{y_1}{b^2}.$$

En éliminant le paramètre variable u, on a

$$a^2y_1(2x + x_1) = (2y + y_1)b^2x_1.$$

Le lieu de ω est donc une droite passant par le milieu de OP, parallèlement à Δ.

2° Pour avoir le lieu de l'orthocentre H de ABC, il est utile d'appliquer le théorème d'Euler (*).

Soient X, Y les coordonnées du centre de gravité G ; ξ, η celles de H ; l'équation aux abscisses des points A, B, C, D, donne

$$x_1 + 3X = \frac{2a^2\alpha}{c^2}.$$

On trouve, de même $y_1 + 3Y = -\frac{2b^2\beta}{c^2}.$

D'ailleurs, en vertu du théorème d'Euler, on a

$$3X = 2x + \xi, \quad 3Y = 2y + \eta.$$

Finalement, le lieu est la droite correspondant à l'équation

$$a^2y_1x + b^2x_1y = 0.$$

Elle est inclinée sur un des axes d'un angle supplémentaire de celui qui forme, avec cet axe, la normale M.

Elle passe par l'origine, et son coefficient angulaire est égal et de signe contraire à celui de Δ.

N.-B. — Nous avons reçu de M. L. Rezeau, conducteur des Ponts et Chaussés à la Roche-sur-Yon, une solution identique à la précédente. M. Rezeau fait observer, avec raison, qu'on peut déduire, de cet exercice, le lieu géométrique des centres des cercles circonscrits aux triangles d'aire minima circonscrits à l'ellipse ; ou, ce qui revient au même, le lieu des orthocentres des triangles d'aire maxima, inscrits à l'ellipse.

Ce lieu est une ellipse semblable à la proposée et correspondant à l'équation

$$a^2X^2 + b^2Y^2 = \frac{c^4}{4}$$

(*) Le centre O du cercle circonscrit à un triangle ABC, le centre de gravité G, et l'orthocentre H, sont trois points en ligne droite ; de plus

$$2OG = GH.$$

QUESTION 140

Solution par M. Ferval, élève au Lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

Assigner, par un procédé direct, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée :

$$(2a^2 - 2a - 1)x^2 - 4(a^2 - 1)xy + (2a^2 + 2a - 1)y^2 = -1$$

dans laquelle a *est un entier donné.*

On trouvera deux séries de solutions ; l'une commence par les systèmes de valeurs :

$$\begin{cases} x = a + 1 \\ y = a \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 3a + 4 \\ y = 3a + 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 11a + 15\ldots \\ y = 11a + 4\ldots \end{matrix}$$

L'autre série se deduit de la précédente, en observant que, si l'on change a *en* — a, *l'équation demeure la même à l'échange près des indéterminées l'une dans l'autre. On a donc encore pour la préposée les solutions :*

$$\begin{cases} x = a \\ y = a - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a - 1 \\ y = 3a - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11a - 4\ldots \\ y = 11a - 15\ldots \end{cases}$$

(S. Réalis.)

Posons $x = y + z$.

z devant être entier comme x et y ; l'équation devient

$$2y^2 - 2(2a - 1)2y + (2a^2 - 2a - 1)z^2 + 1 = 0,$$

et donne

$$y = \frac{(2a - 1)z \pm \sqrt{3z^2 - 2}}{2}.$$

Pour que y soit entier, il faut et il suffit que l'expression $3z^2 - a$ soit égale à un carré parfait v^2.

Or l'équation indéterminée

$$v^2 - 3z^2 = -2$$

admet les solutions en nombre infini,

$$\begin{cases} v = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v = 5 \\ z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} v = 19 \\ z = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} v = 71 \\ z = 41 \end{cases} \quad \begin{cases} v = 265 \\ z = 153 \end{cases}$$

qu'on obtient en égalant v et z respectivement aux numérateurs et dénominateurs des réduites impaires ramenées à leurs plus simples expressions, de $\sqrt{3}$ développées en fractions

continues de la façon suivante :

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + 2 \ldots}}}$$

(Journal de Mathématiques élémentaires 1884, p. 15.
Journal de Mathématiques spéciales 1884, pp. 73 et 97.*)*

Au système $\begin{cases} v = 19 \\ z = 11 \end{cases}$ par exemple, correspondent les systèmes de valeurs :

$$y_1 = \frac{(2a - 1z) + v}{2} = 11a\,4$$

$$x_1 = y_1 + z = 11a + 15$$

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{(2a - 1)z - v}{2} = 11a - 15 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} + z = 11a - 4, \end{cases}$$

et ainsi on trouve à la fois les deux séries de solutions entières en x et y satisfaisant à l'équation; elles se déduisent d'ailleurs l'une de l'autre comme l'indique l'énoncé.

Remarque. — La méthode suivie par M. Ferval, comme l'on voit, ramène la question posée par Realis à la résolution d'une équation indéterminée, qui appartient au genre des équations de *Pell*. On peut obtenir cette équation par une méthode très naturelle. Ordonnons l'équation (A) par rapport à a; il vient

$$a^2(x - y)^2 - a(x^2 - y^2) - x^2 + 3xy - y^2 - 1 = 0,$$

et résolvez-la par rapport à a. Le discriminant est

$$(x - y)^2[5(x - y)^2 + 4]$$

Puisque a est un nombre entier, il faut d'abord que l'on ait

$$5(x - y)^2 + 4 = \theta^2,$$

θ désignant un nombre entier.

On peut ensuite éviter l'emploi de la théorie des fractions continues, en raisonnant comme il suit.

Cherchons les solutions, en nombre commensurables de l'équation

$$(1) \qquad 5t^2 + 4 - \theta^2 = 0$$

et, à cet effet, observons que cette relation peut se mettre sous

la forme suivante

$$\frac{5t}{\theta + 2} = \frac{\theta - 2}{t} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ces égalités donnent

$$(2) \qquad \theta = 2\,\frac{\alpha^2 + 5\beta^2}{-\alpha^2 + 5\beta^2}, \quad t = \frac{4\alpha\beta}{-\alpha^2 + \beta^2}.$$

Si l'on possède une solution entière ($\alpha\beta$) de l'équation (1), ces formules en donnent immédiatement une seconde, puis une troisième, etc. Par exemple, la solution $t_1 = 1$ $\theta_1 = 3$ donne une solution nouvelle $t_2 = 3$, $\theta_2 = 7$; il suffit, dans (2), de supposer $\alpha = 3$, $\beta = 1$, etc.

Mais cette méthode ne donne pas toutes les solutions entières de l'équation (1) ; elle fournit seulement une infinité de solutions.

G. L.

QUESTIONS PROPOSEES

263. — Une droite se déplace de façon que trois de ses points restent sur trois plans parallèles à une même droite. Démontrer qu'un point de la droite mobile se déplace sur un plan.

(Mannheim.)

264. — Démontrer que le nombre de variations de la suite de Sturm, pour une équation donnée, lorsqu'on y fait $x = \alpha$, est égal au nombre des racines réelles de cette équation, qui sont supérieures à α, augmenté du nombre des racines imaginaires.

(Hermite.)

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6034-3-9.

ÉTUDE D'UNE COURBE
AUTOUR D'UN POINT SINGULIER

Par M. Lucien Lévy.

(*Suite*, voir p. 73.)

1er Groupement. — Le premier et le deuxième terme sont de même ordre, x est de l'ordre $\frac{1}{q-p}$; par suite, x^{r-p} est de l'ordre $\frac{r-p}{q-p}$, qui doit être supérieur à 2.

Ainsi, on a
$$r - p > 2q - 2p,$$
ou
$$r > 2q - p. \tag{7}$$
L'équation (6) se réduit alors à
$$\varepsilon\psi_1(t') + x^{q-p}\psi_1(t') = 0, \tag{8}$$
laquelle se discute comme l'équation (5); on obtient ainsi une première branche tangente à la droite
$$y = t'x,$$
et l'on a rendu compte de $q - p$ racines infiniment petites (données par l'équation 8).

2e Groupement. — Les deux derniers termes de l'équation (6) sont seuls d'un même ordre : l'équation (6) se réduit à
$$\varepsilon x^{q-p}\psi_1(t') + x^{r-p}\varphi_r(1, t') = 0,$$
ou
$$\varepsilon\psi_1(t') + x^{r-q}\varphi_r(1, t') = 0. \tag{9}$$
Cette équation se discute encore comme l'équation (5) et on trouve une nouvelle branche tangente à la droite
$$y = t'x.$$
L'équation (9) donne $r - q$ racines infiniment petites de l'ordre $\frac{1}{r-q}$ et l'on a la condition
$$\frac{r-p}{r-q} < 2,$$

ou
$$r > 2q - p,$$
condition identique avec (7).

Le groupement actuel sera possible en même temps que le premier; et les $r - q$ racines infiniment petites qui en

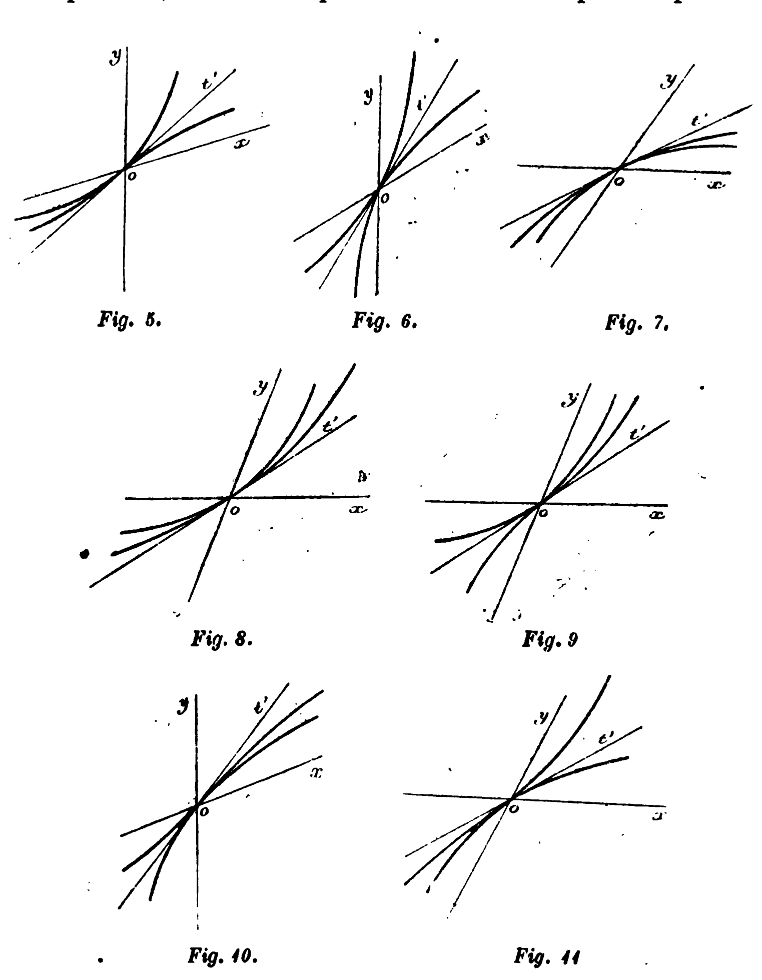


Fig. 5. *Fig. 6.* *Fig. 7.* *Fig. 8.* *Fig. 9* *Fig. 10.* *Fig. 11*

résultent, ajoutées aux $q - p$ déjà trouvées, constituent les $r - p$ racines infiniment petites de l'équation (6). On prévoit

donc que le groupement qui nous reste à faire ne sera pas possible quand les deux premières le seront et inversement.

Réunion des deux branches fournies par les deux combinaisons déjà étudiées : on trouvera en juxtaposant deux des quatre figures 1, 2, 3, ou 4 une des sept figures précédentes.

Troisième groupement. — Le premier et le dernier terme sont de même ordre ; x est de l'ordre $\frac{2}{r-p}$. Pour que le terme du milieu, qui est d'ordre $1+\frac{2(q-p)}{r-p}$, soit d'ordre supérieur au second, il faut que l'on ait

$$\frac{2(q-p)}{r-p} > 1,$$

ou

$$r < 2q - p,$$

inégalité incompatible avec la condition (7), comme nous l'avions prévu. Les valeurs infiniment petites de x, au nombre de $r-p$, seront données par l'équation

$$\varepsilon^2\Phi_1(t') + x^{r-p}\varphi_r(1,t') = 0;$$

que nous écrivons, plus simplement,

$$\varepsilon^2 + Cx^{r-p} = 0. \tag{10}$$

Si C est positif et $r-p$ pair, cette équation n'admet aucune racine réelle : le point est isolé.

Si C est positif et $r-p$ impair, à toute valeur de ε correspond une valeur négative de x et une seule : point de rebroussement de première espèce (*fig. 12*).

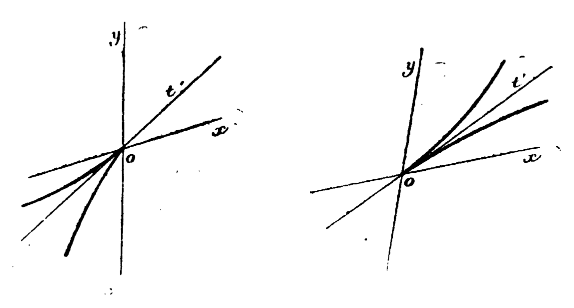


Fig. 12. *Fig. 13.*

Si C est négatif et $r-p$ impair, à toute valeur de ε corres-



pond une valeur positive de x et une seule : point de rebroussement de première espèce *(fig. 13)*.

Enfin si C est négatif et $r - p$ pair, à toute valeur de ε correspondent deux valeurs de x de signes contraires. On retrouve la disposition de la figure 5.

4e Groupement. — Pour achever l'étude de la racine double, il reste à examiner le cas où les trois termes seraient de même ordre. Dans ce cas, x^{q-p} est du premier ordre, x^{r-p} du second, donc

$$r - p = 2(q - p),$$

ou

$$r = 2q - p,$$

condition exclusive des autres : les $r - p$ racines infiniment sont données par l'équation (6), qui peut s'écrire ainsi :

$$(6\ bis)\quad \Phi_1(t') + \frac{x^{q-p}}{\varepsilon}\psi_1(t') + \left(\frac{x^{q-p}}{\varepsilon}\right)^2 \varphi_r(1, t') = 0.$$

Si cette équation du second degré a ses racines imaginaires, on n'en pourra conclure aucune valeur réelle pour x : on a un point isolé. Si ses racines sont réelles et distinctes, soient α_1 et α_2 ces deux racines, on aura

$$\frac{x^{q-p}}{\varepsilon} = \alpha_1,$$

et

$$\frac{x^{q-p}}{\varepsilon} = \alpha_2,$$

qui se discuteront comme l'équation (5). Elles donneront naissance chacune, à une branche tangente à la droite $y = t'x$, d'où une des sept dispositions indiquées dans les figures 5 à 11.

Si enfin l'équation (6 *bis*) a ses racines égales, la valeur commune de ces racines sera

$$(11)\qquad x^{q-p} = -\frac{\varepsilon\psi_1(t')}{2\varphi^r(1, t')}.$$

On en conclura la ou les deux valeurs de x correspondantes par une discussion tout à fait analogue à celle de l'équation (5) ; mais il est nécessaire d'observer que nous obtenons ainsi $q - p = \dfrac{r - p}{2}$ racines infiniment petites, et non $r - p$ comme il le faudrait. C'est que nous avons calculé, jusqu'à présent, non pas les racines infiniment petites elles-mêmes,



mais seulement leurs valeurs principales : c'était suffisant tant que ces valeurs principales étaient distinctes ; mais ici où ces valeurs sont deux à deux égales, il faut pousser le calcul plus loin pour séparer entièrement les $r - p$ racines infiniment petites. Pour cela, considérant toujours ε comme l'infiniment petit principal, nous poserons

$$x = x' + x''$$

x' étant la partie principale de x et x'' la partie principale de $x - x'$; x'' est infiniment petit par rapport à x'. Substituons $x' + x''$ à x, et $t_1 + \varepsilon$ à t, dans l'équation (3) ; nous aurons une nouvelle équation entre les deux infiniment petits x'' et ε, équation qui devra être traitée comme il a été fait pour l'équation en x. Comme x' est donné par l'équation (11), la seule inconnue sera donc x''. Il arrivera alors de deux choses l'une : ou bien l'équation en x'' fera connaître pour x'' deux valeurs distinctes (réelles ou non) et alors la séparation sera entièrement effectuée ; ou bien les deux valeurs de x'' seront encore égales et il sera nécessaire de pousser plus loin. On posera

$$x = x' + x'' + x''',$$

x''' étant infiniment petit par rapport à x' et à x'' valeurs déterminées par les calculs précédents ; puis, on formera l'équation en x''' ; elle sera du second degré, comme l'équation en x''. L'équation en x''' aura ses racines distinctes : sinon on recommencera ; et l'on finira toujours par séparer les racines, à moins que les branches ne soient confondues dans tout leur parcours auquel cas la courbe serait l'ensemble de deux courbes coïncidentes.

Remarque. — Il importe d'observer que la valeur de x peut être réelle et dans ce cas, elle pourrait faire croire à l'existence d'une branche réelle, sans qu'il en soit ainsi. Par exemple, la courbe

$$(y - x)^2 - 2(y - x)x^2 + x^4 - x^5 - y^6 = 0,$$

conduit, en posant $y = (1 + \varepsilon)x$,

à la première valeur approchée $x' = \varepsilon$, et il semblerait qu'à toute valeur de ε corresponde une valeur de x et par suite un point de la courbe. Mais si l'on pose

$$x = x' + x'',$$

on trouve $x''^2 = x'^3 = \varepsilon^3$

et l'on voit que ε doit être positif : on a donc deux valeurs pour x'', d'où résultent deux points sur toute sécante passant à l'origine et au-dessus de la tangente. Les valeurs de x sont

$$x = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^3}$$

et sont positives toutes les deux : on a un point de rebroussement de seconde espèce *(fig. 14)*.

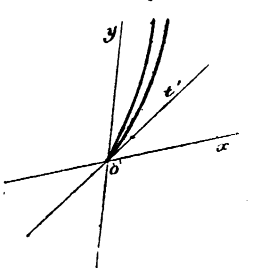


Fig. 14.

CAS GÉNÉRAL : *Racines multiples quelconques.* — Soit μ le degré de multiplicité de la racine τ qui correspond à la tangente

$$y = \tau x.$$

En posant
$$y = (\tau + \varepsilon)x,$$
on sera conduit à une équation de la forme

$$(12) \quad A\varepsilon^{\mu} + B\varepsilon^{\mu-1}x^{\alpha} + C\varepsilon^{\mu-2}x^{\beta} + \ldots + Lx^{\lambda} = 0.$$

Il faudra grouper les termes de même ordre. Dans la pratique, ce groupement se fera sans peine, parce que l'équation précédente sera privée d'un certain nombre de termes. On obtiendra ainsi des équations binômes ou trinômes qui se discuteront, comme les équations (5) et (6). Si quatre ou un plus grand nombre de termes sont de même ordre, on sera conduit à des équations dont la résolution présentera les mêmes difficultés que celle de toutes les équations de degré supérieur au second. Mais il ne se produira d'accident nouveau au point de vue de la discussion des courbes, que si l'une de ces équations a une racine multiple d'ordre supérieur au second. Cette racine multiple représentant la valeur principale d'un certain nombre de racines infiniment petites ; pour séparer ces racines infiniments petites, il faudra procéder comme nous l'avons indiqué pour les racines données par la formule (11).

Enfin, si le groupement des termes de l'équation (12) présente trop de difficultés, on appliquera la règle de Newton exposée dans le mémoire de Puiseux ou dans les ouvrages classiques auxquels nous nous bornons à renvoyer.

(A suivre.)

SUR LES SURFACES

ADMETTANT LES PLANS DE SYMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE RÉGULIER ET DU CUBE

Par M. **Ernest Lebon,**
Professeur de mathématiques, au Lycée Charlemagne.

AVERTISSEMENT

L'Académie des Sciences avait proposé, comme sujet de *Concours pour le grand prix des sciences mathématiques en 1886*, la question suivante : *Étudier les surfaces qui admettent tous les plans de symétrie de l'un des polyèdres réguliers.* Elle appelait en particulier l'attention des concurrents sur celles de ces surfaces qui sont algébriques et du plus petit degré, ou qui jouissent de quelque propriété remarquable relative à la courbure.

Notre Mémoire ayant été apprécié avec éloge par l'Académie, nous croyons utile de publier ici les principaux résultats qu'il renfermait et qui ne dépendent que du programme des *Mathématiques spéciales.*

I. — INTRODUCTION.

1. — *Les polyèdres réguliers convexes admettent des plans de symétrie passant par leur centre, au nombre de six pour le tétraèdre régulier, de neuf pour le cube et l'octaèdre régulier, de quinze pour le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers.*

2. — Soient un cube AH *(fig. 1)*, de centre O, et l'octaèdre régulier conjugué. Les quatre sommets B, D, E, G du cube, extrémités de deux diagonales menées dans deux faces opposées, et perpendiculaires entre elles, sont les sommets d'un tétraèdre régulier. Les sommets de l'octaèdre régulier conjugué sont les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier. Ces trois polyèdres réguliers sont concentriques. Les neuf plans de symétrie du cube et de l'octaèdre régulier conjugué coïncident; six d'entre eux sont les plans de symétrie du tétraèdre régulier.

3. — Prenons pour plans de coordonnées rectangulaires les trois plans de symétrie du cube perpendiculaires à ses

arêtes, en leurs milieux. Les axes des coordonnées étant OX, OY, OZ (*fig. 1*), les six plans de symétrie communs au tétraèdre, au cube et à l'octaèdre considérés sont

ZOX′, ZOY′; YOX″, YOZ″; XOZ‴, XOY‴;

et leurs équations sont

(1) $x = \pm y;$

(2) $x = \pm z;$

(3) $y = \pm z.$

4. — En supposant qu'une surface du troisième degré, rapportée à trois axes rectangulaires, admette les plans de symé-

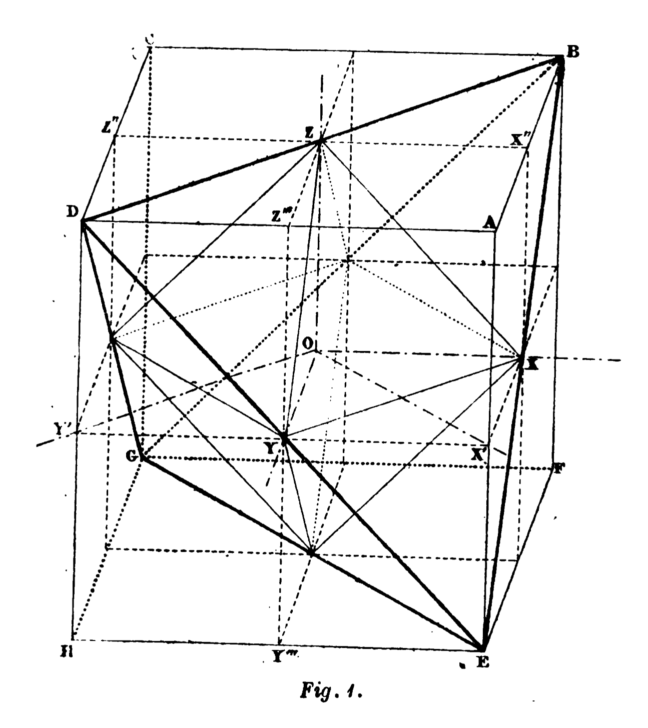


Fig. 1.

trie (1); que la surface obtenue admette les plans de symétrie (2), on trouve que *l'équation du troisième degré*

(4) $$o = a + b(x^2 + y^2 + z^2) + 2xyz$$

est, en coordonnées rectangulaires, l'équation générale des surfaces

algébriques, du troisième degré, admettant les six plans de symétrie du tétraèdre régulier. Nous dirons que tétraèdre régulier est *directeur* de la surface. Nous appellerons *surfaces tétraédriques* les surfaces représentées par l'équation (4).

5. — Considérons l'équation générale des surfaces du quatrième degré ayant trois plans de symétrie rectangulaires et rapportées à ces trois plans. Supposons que cette surface admette les plans de symétrie (1); que la surface obtenue admette les plans de symétrie (2), on trouve que *l'équation du quatrième degré*

(5) $0 = a + 2b(x^2 + y^2 + z^2) + c(x^4 + y^4 + z^4) + 2d(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)$

est, en coordonnées rectangulaires, l'équation générale des surfaces algébriques du quatrième degré admettant les neuf plans de symétrie du cube. Nous dirons que le cube est *directeur* de la surface. Nous appellerons *surfaces hexaédriques* les surfaces représentées par l'équation (5).

6. Problème. — *Une surface algébrique donnée étant rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires, trouver les équations de ses plans de symétrie passant par l'origine.*

Soit, dans un système d'axes rectangulaires OX, OY, OZ, (*fig.* 2),

(6) $$0 = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

l'équation d'un plan passant par l'origine, α, β, γ étant les cosinus directeurs.

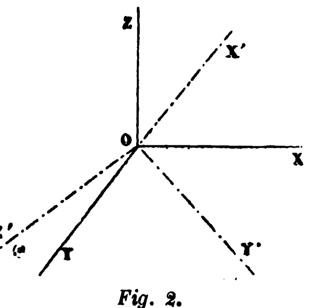


Fig. 2.

Rapportons une surface algébrique, donnée par rapport à ces systèmes, à un système de trois nouveaux axes rectangulaires OX′, OY′, OZ′. L'axe OX′ est la perpendiculaire, en O, au plan (6), l'axe OZ′ est l'intersection des plans XOY et (6), l'axe OY′ est dans le plan (6). Par hypothèse, OX′ fait avec OX, OY, OZ des angles dont les cosinus sont α, β, γ. Posant

$$\delta = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

et admettant que α et β ne soient pas nuls en même temps, on trouve que les formules de transformation sont

$$x = \alpha x' + \frac{\gamma\alpha}{\delta} y' - \frac{\beta}{\delta} z',$$

$$y = \beta x' + \frac{\beta\gamma}{\delta} y' + \frac{\alpha}{\delta} z',$$

$$z = \gamma x' - \delta y'.$$

A présent, remplaçons x, y, z par leurs valeurs dans l'équation de la surface considérée : si cette surface admet le plan Y'OZ' pour plan de symétrie, sa nouvelle équation ne doit contenir que des puissances paires de x', en outre des termes indépendants de x'. Donc, en annulant les coefficients des termes où l'exposant de x' est impair, on obtient un système d'équations simultanées, liant entre eux les coefficients des équations du plan (6) et de la surface considérée, quand celle-ci admet le plan Y'OZ' pour plan de symétrie.

7. — Appliquant ce problème à l'équation (4), et ensuite à l'équation (5), on trouve que : 1° *les surfaces représentées par l'équation* (4) *n'admettent, comme plans de symétrie passant par l'origine, que ceux du tétraèdre régulier; 2° les surfaces représentées par l'équation* (5) *n'admettent comme plans de symétrie passant par l'origine, que ceux du cube ou de l'octaèdre régulier.*

(A suivre.)

VARIÉTÉS

QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE

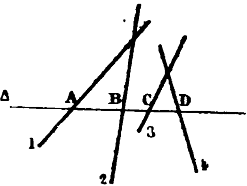
(*Suite*, voir p. 87.)

10. Détermination des courants maritimes (*). — « Pour déterminer, dit M. Reveille (*loc. cit.*), la position du navire, on sait que l'on observe une série de hau-

(*) Les idées développées dans ce paragraphe sont empruntées, pour la plus grande partie, à une note publiée par M. J. Reveille, professeur

teurs prises à différents moments et qu'on appelle *hauteurs à intervalle.*

Si l'on a pris quatre hauteurs à intervalle, ces quatre droites de hauteur, ramenées au quatrième horizon, et corrigées de l'erreur personnelle (*), doivent concourir. Il n'en est pas ainsi, à cause des courants et l'on reconnaît



que si 1, 2, 3, 4 sont les droites de hauteur, il faut tracer une transversale Δ telle que les chemins AB, BC, CD soient proportionnels aux intervalles des observations. »

On voit, d'après cela, comment la détermination des courants maritimes conduit à un problème de Géométrie, pouvant s'énoncer ainsi :

Quatre droites 1, 2, 3, 4 *étant données, tracer une transversale* Δ, *telle que les segments interceptés soient proportionnels à des nombres donnés.*

Nous rappellerons d'abord comment on résout le problème suivant : *Étant données trois droites* 1, 2, 3 *et une direction* xy; *parallèlement à* xy, *mener une transversale* Δ *telle que les segments interceptés soient proportionnels à des nombres donnés.*

Menons A'B'C' parallèle à xy, et déterminons, sur cette droite, un point C' tel que

$$\frac{B'C'}{B'A'} = \frac{m}{n};$$

m, n désignant les nombres donnés. Soit O le point de con-

---

d'Hydrographie, dans la *Revue maritime et coloniale*, tome LXXXIX ; 296e livraison, mai 1886, p. 274. Cette note est intitulée : *Détermination des courants, par une série de quatre hauteurs à intervalle.*

Ce problème a été traité par M. Fasci dans un article ayant pour titre *Mémoire sur le point observé et la détermination des courants à la surface de la mer.* La solution que nous développons ici est celle de M. Reveille.

(*) Si l'on observe trois hauteurs d'astre simultanées, les trois droites de hauteur correspondantes doivent se couper au même point, qui est la position vraie du navire.

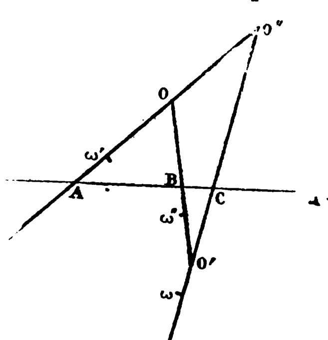
En général, il n'en est pas ainsi, et les droites forment un triangle L'erreur se mesure par le rayon du cercle inscrit; c'est l'*erreur personnelle.*

cours des droites 1, 2; OC′ rencontre la droite 3 en C. En menant, par C, une parallèle à xy, le problème est résolu; il n'admet, d'ailleurs, qu'une solution.

Supposons maintenant que l'on fasse varier la direction de xy; nous allons montrer que Δ enveloppe une parabole inscrite au triangle 1, 2, 3.

En effet, à un point A ne correspond qu'un seul point B; et réciproquement; la droite AB, dont les extrémités décrivent sur OA, OB des divisions homographiques enveloppe, comme on sait, une conique Γ inscrite à l'angle AOB. Pour une raison analogue, Γ est inscrite à l'angle BO′C. Ainsi, Γ est une conique inscrite au triangle 1, 2, 3. Si l'on observe que les angles O, O′ interceptent, sur la droite de l'infini, des segments infiniment grands, on voit que l'on peut considérer cette droite comme représentant une position particulière de Δ. La conique Γ est donc tangente à la droite de l'infini; en d'autres termes, Γ est une parabole.

Pour déterminer les points de contact de Γ avec les côtés du triangle OO′O″, on peut observer d'abord que : si A vient en O, C coïncide, au même instant, avec O′; et le point B occupe, sur OO′, une position limite ω″. Ce point ω″ donnant lieu à la relation



$$\frac{\omega''O'}{\omega''O} = \frac{m}{n}.$$

Le même raisonnement prouve que les points de contact de Γ, avec les côtés O′O″, OO″ sont des points ω, ω′ tels que

$$\frac{\omega O'}{O'O''} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{\omega' O}{OO''} = \frac{n}{m}.$$

La connaissance de trois droites tangentes à la parabole Γ, et celle des points de contact, permet, de bien des façons, de construire le foyer F de cette courbe.

Cela posé, revenons au problème que nous avions en vue.

Soit Γ la parabole, déterminée comme nous venons de le dire, ét tangente aux droites 1, 2, 3 ; soit, de même, Γ' la parabole analogue inscrite au triangle formé par les droites 2, 3, 4. Les paraboles Γ, Γ' ont trois tangentes communes en évidence; les droites 2, 3, d'une part; et la droite de l'infini, d'autre part. Ces deux courbes admettent une quatrième tangente commune. Cette droite constitue, précisément, la transversale Δ que nous nous proposions de tracer dans le plan des droites donnécs 1, 2, 3, 4.

Imaginons le triangle formé par la droite inconnue Δ et par les droites 2, 3. On sait que le cercle circonscrit à ce triangle passe par les foyers F, F′ des paraboles Γ, Γ'. De cette remarque, découle la construction suivante :

On détermine les foyers des paraboles Γ, Γ' ; *par ces points, et par le point de rencontre des droites* 2, 3, *on fait passer une circonférence qui coupe celle-ci en deux points* M, N; MN *est la droite cherchée.*

Remarque. — La vitesse du courant (1) se calcule en divisant l'un des segments AB par l'intervalle des observations qui correspondent aux droites 1, 2.

(A suivre.)

(*) On vérifie ces résultats par le calcul en cherchant l'équation tangentielle de Γ. A cet effet, ayant posé

$$OA = u, \quad OB = v, \quad OO' = c, \quad OO'' = b,$$

et

$$\frac{BC}{BA} = \frac{m}{n},$$

on trouve facilement la relation : $m\frac{u}{b} + (m + n.\frac{v}{c} = n.$

L'enveloppe de ABC est donc une parabole; cette équation prouve aussi que les points de contact de cette courbe avec les côtés du triangle OO′O″ sont bien ceux que nous avons déterminés par des considérations géométriques.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Tarry, *à Alger.*
(Solution de la question 262.)

... Plaçons-nous dans le cas général de la question proposée (*), celui qui correspond à l'énoncé suivant :

On donne, dans un plan, une conique Γ ; *deux points* P, Q *sur cette conique et deux points quelconques* A, B. *Par le point* A, *on mène une sécante variable qui coupe* Γ *en deux points* C, D ; *on fait passer une conique* Δ *par les points* C, D, P, Q, B. *On demande le lieu du pôle, par rapport à* Δ, *d'une droite fixe quelconque.*

La droite AB (**) rencontre : la conique Γ en R, R′ ; la droite fixe PQ, en A′ ; et la conique variable Δ, en un second point B′.

Or, les deux coniques Δ, Γ et le couple PQ, CD rencontrent AB en six points B, B′ ; R, R′ ; A, A′ ; qui sont en involution. Les cinq points B, R, R′, A, A′ étant fixes, B′ est donc aussi, un point fixe. Ainsi, la conique variable Δ passe par un quatrième point fixe B′.

Le problème proposé revient donc au suivant, lequel est très connu :

Trouver le lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère.

On sait que ce lieu est une conique qui passe par le point de rencontre des deux diagonales du quadrilatère et par les points de rencontre des côtés opposés (Chasles, *sections coniques*, § 309).

Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne.

... J'ai donné une solution très simple (et plus complète que celle que vous avez insérée) de la question 1 de la page 90, du numéro d'Avril du *Journal de Mathématiques spéciales*, dans les

(*) Voyez *Journal*, p. 47.
(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

Nouvelles Annales (1884, p. 528). Je démontre, en effet, que si R est le point fixe par lequel passe CD, *ce point se trouve sur la droite* PQ (avec les notations de votre énoncé) et que si I et J sont les points où la droite PQ coupe la conique Γ, le point Q a même conjugué harmonique par rapport aux couples de points (I, J) et (P, R), ce qui achève de déterminer le point R.

ÉCOLE NORMALE (1888)

CONCOURS D'ADMISSION

Solution par M. G. LEINEKUGEL, élève au Lycée de Douai.

Un polynôme f(x), *du degré* n, *vérifie l'identité*

$$nf(x) \equiv (x - a)f'(x) + bf''(x).$$

1° *Chercher les coefficients de* f(x), *ordonnée suivant les puissances de* $x - a$.

2° *Chercher les conditions de réalité de l'équation* $f(x) = 0$.

3° *Prouver que si* b_0 *est la valeur absolue de* b, *les racines de* $f(x) = 0$ *sont comprises entre*

$$a - \sqrt{\frac{n(n-1)b_0}{2}} \quad et \quad a + \sqrt{\frac{n(n-1)b_0}{2}}.$$

Il est utile de poser $x - a = X$, pour simplifier la solution.

Alors, $f(x)$ prend la forme

$$F(X) \equiv a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \dots + a_p X^{n-p} + \dots + a_n,$$

avec l'identité :

$$nF(X) \equiv XF'(X) + bF''(X);$$

ou

$$n(a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \dots + a_n)$$
$$\equiv X[na_0X^{n-1} + (n-1)a_1X^{n-2} + \dots + (n-p)a_pX^{n-p} + \dots + a_{n-1}$$
$$+ b[n(n-1)a_0X^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1X^{n-3} + \dots$$
$$+ (n-p)(n-p-1)X^{np-2} \dots + 2a_{n-2}].$$

L'identification donne

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2p+1} = \dots = 0,$$

et

$$a_2 = \frac{n(n-1)}{2} ba_0,$$

$$a_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4}b^2a_0,$$
$$a_6 = \frac{n(n-1)\dots(n-5)}{2.4.6}b^3a_0,$$
$$\vdots$$
$$a_{2p} = \frac{n(n-1)\dots-[n-2p+1]}{2.4.6\dots 2p}b^pa_0.$$

Les relations précédentes nous montrent que les coefficients de rang pair sont tous nuls. Il en résulte que, si n est impair, le dernier coefficient est nul ; l'équation $f(X) = 0$ admet une racine nulle $X = 0$, ou $x = a$. On peut donc supposer n pair ; le polynôme $f(X)$ ne contient plus que des termes de degré pair, et peut s'écrire

$$F(X) \equiv X^n + \frac{A_n^2}{2}X^{n-2}b + \frac{A_n^4}{2.4}X^{n-4}b^2 + \dots + \frac{A_n^{2p}}{2.4.6\dots 2p}X^{n-2}b^p + \dots + \frac{A_n^n}{2.4.6\dots n}b^{\frac{n}{2}},$$

en supposant $a_0 = 1$, ce qui est permis. Dans cette égalité, A_n^{2p} représente le nombre des arrangements, sans répétition, de n lettres $2p$ à $2p$.

2° L'identité

$$nF(X) \equiv Xf'(X) + bf''(X),$$

donne aussi en différentiant les deux membres par rapport à X :

$$nF'(X) \equiv XF''(X) + bF'''(X).$$

On a, de même, $nF''(X) \equiv XF'''(X) + bF^{IV}(X)$,

. . . .

. . . .

$$nF^{n-2}(X) \equiv XF^{n-1}(X) + bF^n(X).$$

Je dis que ces relations permettent de vérifier, en supposant b négatif, la réalité de toutes les racines de $F(X) = 0$, et par suite de celles de $f(x) = 0$; si a est réel, comme nous le supposons.

En effet, si l'on a $b < 0$, les quatre propriétés des fonctions de Sturm sont applicables à la suite des fonctions

$$F(X), \quad F'(X), \quad F''(X) \quad \dots \quad F^n(X);$$

et comme les premiers termes de ces fonctions sont tous positifs, il s'ensuit que si X varie de $-\infty$ à $+\infty$, il se perd n

variations; donc $F(X) = 0$ a ses n racines réelles. Pour que $F(X) = 0$, et par suite $f(x) = 0$, ait toutes ses racines réelles, il est donc nécessaire et suffisant que, a étant réel, on ait $b < 0$.

3° La somme des carrés des racines positives de l'équation F(X) étant

$$-\frac{bA_n^2}{2} = -\frac{bn(n-1)}{2},$$

il est évident que la plus grande racine est inférieure à

$$\sqrt{b_0\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Mais alors, la formule

$$x = a + X,$$

prouve que toutes les racines de $f(x)$ sont comprises entre

$$a + \sqrt{b_0\frac{n(n-1)}{2}}, \text{ et } a - \sqrt{b_0\frac{n(n-1)}{2}}.$$

EXERCICES ÉCRITS

20. — On considère une ellipse rapportée à ses axes; d'un point M (x_0, y_0), on lui mène les tangentes MP, MQ, les normales en P, Q, rencontrent, de nouveau, l'ellipse en P', Q'.

Soit M' (x_1, y_1) le pôle tangentiel de P' Q'.

1° Exprimer x_1, y_1 en fonction de x_0, y_0.

2° Vérifier les formules trouvées, en supposant que le point M appartienne à l'ellipse.

3° Trouver le lieu décrit par M', quand le point M est mobile sur le cercle de Monge.

4° Déduire, des formules trouvées, la démonstration du théorème suivant:

D'un point ω, pris sur l'ellipse, on peut mener, abstraction faite de la normale au point ω, trois normales à cette ellipse. Soient P, Q, R les pieds de ces normales. Les tangentes, en

ces points, rencontrent la tangente au sommet A aux points P″, Q″, R″. Démontrer les relations suivantes :

1° $$\Sigma\, AP''.AQ'' = a^2 + c^2,$$

2° $$\sum \frac{1}{AP''.AQ''} = \frac{a^2 + c^2}{b^4}.$$

Notes sur l'exercice 19.

Soit x_1 l'abcisse du pied B de l'une des normales issues du point M. on a $OB' = x_1 + p$. Si B′, comme on le suppose, est le milieu de A′C′, on a

$$2OB' = OA' + OC',$$

ou $$2x_1 = x_2 + x_3.$$

Ayant formé l'équation aux abscisses des points A, B, C, on exprime que l'égalité précédente est vérifiée, et l'on trouve, pour représenter le lieu demandé, l'équation

$$27py^2 = 4(x - p)^3.$$

Ce lieu est donc la développée de la parabole qui correspond à l'équation

$$y^2 = 4p(x + p).$$

2° On trouve

(A) $$x_1 = \frac{2p}{\theta^2}, \quad y_1 = -\frac{2p}{\theta}.$$

3° L'enveloppe de AC a pour équation

$$y^2 + 4px = 0.$$

Cela résulte immédiatement de l'équation de AC :

(B) $$\theta^2 x - \theta y - p = 0.$$

4° La tangente au point B a pour équation

$$yy_1 = p(x + x_1),$$

ou, d'après les formules (A),

(C) $$\theta^2 x + 2\theta y + 2p = 0.$$

Les équations (B), (C) prouvent que le lieu demandé est la tangente au sommet ($x = 0$).

5° Le cercle décrit sur A′C′ comme diamètre, a pour centre le point B′; son équation est

$$x^2 + y^2 - 2xOB' + OA'.OC' = 0,$$

ou $$x^2 + y^2 - 2px\left(1 + \frac{2}{\theta^2}\right) + p^2\left(\frac{1}{\theta^4} + \frac{4}{\theta^2} + 1\right) = 0.$$

L'enveloppe demandée est représentée psr l'équation

$$y = \pm (x - p)\sqrt{3}.$$

Elle est constituée par un système de deux droites passant par le point (p, o) et inclinées, sur ox, d'angles égaux à $\pm 60°$.

Nota. — Nous avons reçu de bonnes solutions de cet exercice de MM. Rezeau, conducteur des ponts et chaussées, à la Roche-sur-Yon; et Ravier, maître auxiliaire au lycée Louis-le-Grand.

QUESTIONS RÉSOLUES

3. — *Calculer la somme des coefficients du binôme, ces coefficients étant pris de trois en trois* (*).

Dans l'identité

(1) $$(1 + x)^m = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots$$

Posons

(2) $$\begin{aligned} U &= A_0 + A_3 + \ldots \\ V &= A_1 + A_4 + \ldots \\ W &= A_2 + A_5 + \ldots \end{aligned}$$

et proposons nous de calculer U, V, W.

Nous avons d'abord, par une relation connue, (déduite de l'identité (1) en faisant $x = 1$),

(2) $$2^m = U + V + W.$$

Remplaçons, maintenant, x par j, j désignant une racine cubique imaginaire de l'unité; on a

$$\begin{aligned}(1 + j)^m = A_0 &+ A_1j + A_2j^2 \\ &+ A_3 + A_4j + A_5j^2 \\ &+ \ldots\end{aligned}$$

ou $$(1 + j)^m = U + Vj + Wj^2.$$

Nous en déduisons

$$(j + j^2)^m = Uj^m + Vj^{m+1} + Wj^{m+2};$$

ou, en observant que $j + j^2 = - 1$:

(4) $$(- 1)^m = Uj^m + Vj^{m+1} + Wj^{m+2}.$$

Considérons maintenant l'égalité

$$A + Bj + Cj^2 = 0,$$

et remplaçons j et j^2 par leurs valeurs :

$$j = - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^2 = - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(*) Le cas général, celui où l'on prend les coefficients binomiaux de p en p, a été traité par M. Catalan (*Nouvelles annales*, 1861; p. 260). La solution algébrique est possible, toutes les fois que l'on peut déterminer une racine primitive de l'équation $z^p - 1 = 0$.

En désignant par $S_0, S_1, \ldots S_{p-1}$ la somme des coefficients, pris de p en p, en commencant respectivement par les coefficients de rang 1, 2, ... p; on a, comme le prouve M. Catalan,

$$pS_k = (1 + \theta)^m.\theta^{-k} + (1 + \theta^2)^m.\theta^{-2k} + \ldots + (1 + \theta^p)^m.\theta^{-pk}.$$

Nous obtenons les relations :

$$A - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = 0, \quad \text{et } B = C;$$

c'est-à-dire

$$A = B = C.$$

Cela posé, si nous revenons à l'égalité (4), nous pourrons distinguer trois cas, suivant que m, $m + 1$, ou $m + 2$ est un multiple de 3.

Par exemple, si m est un multiple de 3, on a

$$(5) \qquad V = W = U - (-1)^m.$$

Les égalités (3) et (5) résolvent la question proposée, etc.

Remarque. — Nous rappellerons, à propos de cette question, comment on calcule la somme des coefficients du binôme, pris de quatre en quatre (V. *Nouvelles Annales*, 1861, p. 8); ce problème comporte quatre inconnues. Pour les déterminer, on remplace, dans (1), x par $\sqrt{-1}$; puis, après avoir posé

$$S_1 = A_1 + A_5 + \ldots, \quad S_3 = A_3 + A_7 + \ldots,$$
$$S_2 = A_2 + A_6 + \ldots, \quad S_4 = A_0 + A_4 + \ldots,$$

on observe que

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = 2^{m-1},$$

et l'on trouve, finalement,

$$4S_1 = 2^m + (1 + i)^m + (1 - i)^m,$$
$$4iS_2 = i.2^m + (1 + i)^m - (1 - i)^m,$$
$$4S_3 = 2^m - (1 + i)^m + (1 - i)^m,$$
$$4iS_4 = i.2^m - (1 + i)^m + (1 - i)^m.$$

QUESTION 133

Solution.

Soient ABC *un triangle;* A'B'C' *le triangle formé par les trois tangentes en* A, B, C *au cercle circonscrit;* O *le centre du cercle inscrit;* A_1, B_1, C_1 *les pieds des bissectrices intérieures*, A_2, B_2, C_2 *les points où les perpendiculaires menées par* O *à* OA, OB, OC *oupent respectivement* BC, CA, AB. *Soient* H_a, H_b, H_c *les coniques qui passent respectivement par les cinq points* A', B_1, C_1, B_2, C_2; B', C_1, A_1, C_2, A_2; C', A_1 B_1, A_2, C_2. *Ces coniques sont des hyper-*

boles, elles ont deux à deux une direction asymptotique commune, anti-parallèle à l'un des côtés du triangle A'B'C'. *En dehors des points communs qui les déterminent et des points situés à l'infini,* H_b *et* H_c, H_c *et* H_a, H_a *et* H_b *se coupent en* A_2, B_2, C_2. *Démontrer que les parallèles menées respectivement par* A_3, B_3, C_3 *à* B'C', A'C', A'B' *se coupent en un même point.*

Énoncer les théorèmes analogues obtenus, en remplaçant O *par* O_a, *centre du cercle ex-inscrit.* (E. Lemoine.)

Les coordonnées normales des points A_1, B_1, C_1 sont : o, 1, 1 ; 1, o, 1 ; 1, 1, o. Celles des points A', B', C' sont : $-a, b, c$; $a, -b, c$; $a, b, -c$; celles des points A_2, B_2, C_2 sont : o, $(p-c)$, $-(p-b)$; $-(p-c)$, o, $(p-a)$; $(p-b)$, $-(p-o)$, o.

Les équations des droites A_1A_2, A_2B_1, sont :

$$\alpha(p-a) - \beta(p-c) + \gamma(p-c) = 0;$$
$$-\alpha(p-c) + \beta(p-b) + \gamma(p-c) = 0.$$

L'équation de H_c est de la forme

$$(A_1B_2) \times (A_2B_1) + \lambda\alpha\beta = 0.$$

En déterminant λ par la condition que l'hyperbole passe en C', on a, pour l'équation de H_c,

$$(1)\quad [\alpha(p-a) - \beta(p-c) + \gamma(p-c)]\,[-\alpha(p-c) + \beta(p-b) + \gamma(p-c)] - \alpha\beta\, ab \cos^2 C = 0,$$

ou

$$\alpha^2(p-a) - \beta^2(p-b) + \gamma^2(p-c) + \beta\gamma(c-b) + \gamma\alpha(c-a) + \alpha\beta(a+b-2p\cos C) = 0.$$

On aurait de même les équations de H_a, H_b; si l'on cherche la direction asymptotique de H_c on trouve C'A' et C'B'.

Il suit de là que H_b et H_c ont B'C' pour direction asymptotique commune ; H_c et H_a ont C'A'; H_a et H_b ont A'B'.

Cela posé. si l'on ajoute les équations de H_b et de H_c, prises sous la même forme que l'équation (1), on a, en divisant par α :

$$(2)\quad \alpha(p-a) + \beta(p\cos C - b) + \gamma(p\cos B - c) = 0.$$

Cette équation représente la droite qui passe par A_3 et qui est parallèle à B'C'. On aurait, de même, les droites qui passent par B_3, C_3 et qui sont parallèles à C'A', A'B'; on trouve que les droites se coupent au point :

$$\frac{a[abc - 2p(p-b)(p-c)]}{p-a}, \text{etc.,}$$

ou plus simplement : $ar_a(2R - r_a)$, etc., que nous appellerons M, R, r, r_a, r_b, r_c, représentant comme à l'ordinaire les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits ; *le théorème est donc démontré.*

REMARQUE. — Le point M satisfait, comme on s'en asssure facilement, par une substitution directe, aux équations des hyperboles H_a, H_b, H_c; de sorte que l'énoncé de notre théorème eût dû être déterminé ainsi, au lieu de : *en dehors des points communs qui les déterminent*, etc.

Il eût fallu : *Les trois hyperboles se coupent en un même point.* Notre énoncé devient alors évident, puisque les trois points A_3, B_3, C_3 se confondent en M.

Je vais maintenant énoncer le théorème analogue en remplaçant le centre du cercle inscrit O par le centre d'un cercle ex-inscrit, O_a, par exemple.

Avec les notations précédentes, soient, de plus, A'_1, B'_1, C'_1 les pieds des bissectrices extérieures ; A_{2a}, B_{2a}, C_{2a} les points où les perpendiculaires menées par O_a à AO_a, BO_b, CO_c coupent respectivement BC, CA, AB. *Soient* H_{aa}, H_{ab}, H_{ac} *les coniques qui passent respectivement par les cinq points:* A' B'_1, C'_1, B_{2a}, C_{2a}*;* B', C'_1, A_1, C_{2a}, A_{2a}*;* C', B'_1 A_1, B_{2a}, A_{2a}*; ces coniques sont des hyperboles qui ont, deux à deux, une direction asymptotique commune parallèle à l'un des côtés du triangle* A'B'C' *Ces trois hyperboles se coupent en un point* M_a *qui a pour coordonnées :* $-ar_a(2R + r_a)$, $br_b(2R - r_b)$, $cr_c(2R - r_c)$.

E. L.

QUESTION 141

Solution., par M. FERVAL, élève au Lycée Henri IV, classe de M. Macé de Lépinay.

On propose d'assigner, par un procédé direct, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée :

$$(a^2 - a - 1)x^2 - (2a^2 - 3)xy + (a^2 + a - 1)y^2 = 1,$$

a *étant un entier donné.*

NOTE. — *On trouvera, en outre des valeurs initiales* $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ *les deux séries de solutions :*

$$\begin{cases} x = a + 2 \\ y = a + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a + 5 \\ y = 3a + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8a + 13 \\ y = 8a + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a - 1 \\ y = a - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a - 2 \\ y = 3a - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8a - 5 \\ x = 8a - 13 \end{cases}$$

se déduisant l'une de l'autre comme dans la question précédente.

(S. Réalis.)

Posons encore $x = y + 2$
dans l'équation proposée, nous en tirons

$$y = \frac{(2a - 1)z + \sqrt{5z^2 + 4}}{2},$$

et nous ramenons la question à la résolution en nombres entiers de l'équation :

(1) $$U^2 - 5z^2 = 4.$$

Or si l'on développe $\sqrt{5}$ en fractions continues sous la forme :

$$\sqrt{5} = 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \ddots}}}.$$

on observe qu'une réduite quelconque $\frac{X_i}{Y_i}$ satisfait à la relation :

$$X_i^2 - 5\,Y_i^2 = (-1)^i 4^i$$

et on en conclut que les solutions entières, en nombre infini, de l'équation (1)

$$\begin{cases} U = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} U = 7 \\ z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} U = 18 \\ z = 8 \end{cases}$$

sont respectivement les numérateurs et dénominateurs des réduites paires de $\sqrt{5}$, préalablement divisés par les puissances de 2 marquées par leurs indices dimiminués d'une unité aux valeurs $\begin{cases} U = 7 \\ z = 3 \end{cases}$, correspondent

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{(2a-1)z+U}{2} = 3a+2 \\ x_1 = y_1 + z = 3a + 5 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} y_2 = \dfrac{(2a-1)z-U}{2} = 3a-5 \\ x_2 = y_2 + z = 3a - 2 \end{array}\right.$$

On trouve simultanément les deux séries de solutions entières en x et y qui vérifient l'équation donnée.

Enfin, on a : $x = y = 1$, lorsqu'on prend $\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ U = 2 \end{array}\right.$.

QUESTIONS PROPOSÉES

265. — Soit

$$x = \frac{1}{2^{n-1}}[C_{n,1} - 3\, C_{n,3} + 3^2\, C_{n,5} - \ldots]$$

Si l'on fait $n = 1, 2, 3, \ldots$, les valeurs de x sont : $+1$, -1 ou zéro. *(E. Catalan.)*

266. — On inscrit à un triangle fixe ABC tous les triangles A'B'C' ayant même centre de gravité G. Démontrer que les côtés B'C', C'A', A'B' enveloppent trois paraboles.

(J. Neuberg.)

ERRATA

1° Page 84, *au lieu de*

$$a^2x - 4bcyz = 0, \quad b^2y - 4axz = 0, \quad c^2z - 4cxy = 0;$$

lisez :

$$a^2x^2 - 4bcyz = 0, \quad b^2y^2 - 4acxz = 0, \quad c^2z^2 - 4abxy = 0.$$

2° Page 91, *au lieu de*

$$x_1(\alpha h + \beta h' + h'') + \alpha h' = 0;$$

lisez

$$x_1(\alpha h + \beta h' + h'') + \alpha h'' = 0.$$

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9584-5-9.

DEMONSTRATION
DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT

Par M. **Mangeot**, professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée de Troyes.

J'ai fait connaître, depuis plusieurs années, à quelques professeurs de l'Université, une démonstration nouvelle du théorème de d'Alembert, qui a quelque analogie avec celle que M. Laisant a, récemment (*), indiquée dans ce journal.

Pour établir ce théorème, je commence par démontrer la proposition suivante, qui en est un cas particulier.

Lemme. — *Le produit*
$$Z = z(z - a_1)(z - a_2)\ldots (z - a_n),$$
dans lequel $a_1, a_2, \ldots a_n$, *désignent des quantités données, réelles ou imaginaires, en nombre limité, et pouvant être nulles, peut acquérir toute valeur donnée* H, *réelle ou imaginaire, pour une valeur convenable de la variable imaginaire* z.

La proposition est évidente lorsque H est nul. Supposons $H \neq 0$.

Représentons les quantités $z, a_1, a_2, \ldots a_n$, par des points rapportés à deux axes rectangulaires ωx, ωy; et les quantités Z, H, par deux points rapportés à deux autres axes rectangulaires OX, OY. Le point H ne coïncide pas avec le point O.

Faisons décrire au point z une circonférence γ, de rayon r, autour de ω, et supposons d'abord qu'elle ne passe par aucun des points a_p. Après la rotation, l'argument de z a augmenté de 2π; celui de $z - a_p$ a augmenté également de 2π ou a repris sa valeur initiale, selon que le point a_p est intérieur ou extérieur au cercle γ (*). La somme des arguments des facteurs

(*) Voyez, p. 77.

(*) Cela résulte de ce que l'argument de $z - a_p$ est égal, comme on s'en assure aisément, à l'angle que fait la parallèle a_px' à ωx avec la droite joignant le point a_p au point z.

de Z, c'est-à-dire l'argument de Z, a donc éprouvé, dans tous les cas, une augmentation égale à un multiple de 2π. D'un autre

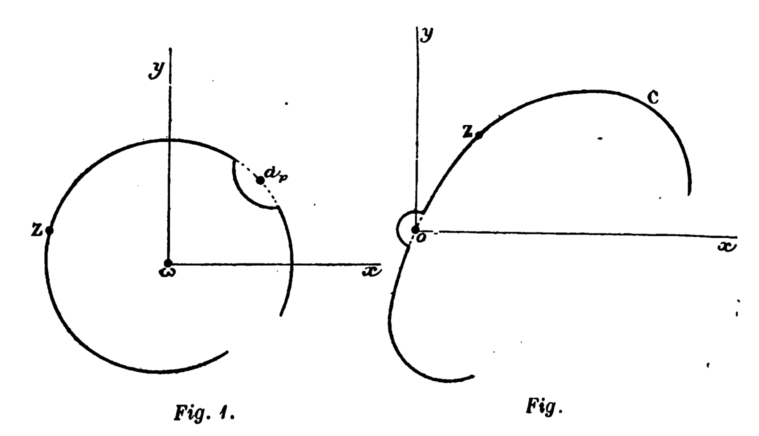


Fig. 1. Fig.

côté, le module de Z, qui est le produit des modules de ses facteurs, a repris sa valeur primitive, sans s'être jamais annulé. Comme enfin Z est une fonction continue de z, puisqu'il en est ainsi de tous ses facteurs (*); dès lors, tandis que le point z a parcouru la circonférence γ, le point Z a dû décrire d'un mouvement continu une courbe fermée C comprenant l'origine O dans son intérieur.

Si la circonférence γ passe par un des points a_p (*fig. 1*), on substituera, à l'arc infiniment petit de cette circonférence, qui a pour milieu le point a_p, tout autre arc infiniment petit ne passant pas au point a_p. De cette façon, lorsque le point z parcourra le contour fermé γ, ainsi modifié; le point Z décrira encore, comme précédemment (*fig. 2*), une courbe fermée C ayant, dans son intérieur l'origine O, qui sera ici infiniment voisine du contour C.

Observons maintenant que si le rayon r, module de z, devient infiniment petit, ou infiniment grand, il en sera de même du module de Z, et la courbe C aura tous ses points infiniment rapprochés, ou infiniment éloignés de l'origine O.

Cela posé, faisons croître r d'une manière continue, à partir

(*) Ou, si l'on veut encore, parce que Z est une fonction entière de z.

de zéro, et au-delà de toute limite. La courbe fermée C, d'abord réduite au point O, prend naissance tout autour de ce point, s'agrandit et se déplace d'une manière continue (*), ayant toujours dans son intérieur l'origine O, et les distances de cette origine à tous les points de la courbe finissent par devenir plus grandes que toute longueur donnée. Dans ce mouvement la courbe C a dû passer nécessairement par tous les points du plan XOY, et en particulier par le point donné H. Il existe donc une valeur de z donnant, à la fonction Z, la valeur H ; et le lemme est démontré.

Je vais en déduire que *toute fonction entière de* z, *de degré* m, *est identique à un produit de* m *fonctions linéaires de* z (**).

Cette proposition, vraie pour $m = 2$, sera établie dans toute sa généralité si je prouve qu'en la supposant vraie pour une valeur quelconque $m = n$ de m, elle l'est aussi pour la valeur $m = n + 1$.

Or soit

$f_{n+1}(z) = A_0 z^{n+1} + A_1 z^n + \ldots + A_n z + A_{n+1} = z f_n(z) + A_{n+1}$

une fonction entière de degré $n + 1$. Le polynôme $f_n(z)$, dont le degré est n, est par hypothèse identique à un produit de n facteurs linéaires tel que $K(z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n)$, K étant une constante; et l'on a l'identité

$$f_{n+1}(z) \equiv Kz(z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n) + A_{n+1}.$$

Mais, d'après le lemme démontré, le second membre de cette identité s'annule pour une certaine valeur de z, telle que $z = b$. Il s'ensuit que le polynôme $f_{n+1}(z)$ est divisible par $z - b$. Le quotient de cette division, qui est un polynôme entier de degré n, sera identique, en nous appuyant toujours sur notre hypothèse, à un produit de n facteurs linéaires. Ainsi, $f_{n+1}(z)$ est un produit de $n + 1$ facteurs linéaires.

C. Q. F. D.

Nota. — Les premiers principes de la théorie des équations sont susceptibles d'une généralisation que je vais indiquer.

(*) D'après la continuité de la fonction Z.

(**) Ce théorème est, à la forme près de l'énoncé, le théorème de D'Alembert.

Soient $\sum_{n=0}^{n=m}(p_n + q_n i)z^n = F(z,i)$ un polynôme entier en z, de degré m, et N un nombre positif donné. Le polynôme $F(z, i\sqrt{N})$ de degré m, est identique à un produit de m facteurs linéaires, tel que

$$[(a_1 + b_1 i)z + \alpha_1 + \beta_1 i][(a_2 + b_2 i)z + \alpha_2 + \beta_2 i]\ldots$$

On entend par là que si l'on développe ce produit et que l'on remplace le carré de i par -1 partout où ce carré peut être mis en évidence, on obtient le polynôme $F(z, i\sqrt{N})$. Il en résulte que si l'on remplaçait i^2 par $-$ N, de la même façon, dans le développement du produit suivant

$$\left[\left(a_1 + \frac{b_1}{\sqrt{N}}i\right)z + \alpha_1 + \frac{\beta_1}{\sqrt{N}}i\right]\left[\left(a_2 + \frac{b_2}{\sqrt{N}}i\right)z + \alpha_2 + \frac{\beta_2}{\sqrt{N}}i\right]\ldots,$$

le polynôme obtenu ne serait autre chose que $F(z, i)$. On peut donc énoncer cette proposition :

Tout polynôme entier en x, *de degré* m, *à coefficients de la forme* p + qi, *qui est toujours décomposable, et cela d'une seule manière, en un produit de* m *fonctions linéaires de* x, *non seulement quand on remplace* i^2 *par* -1 *dans le développement du produit, mais encore lorsqu'on remplace* i^2 *par tel nombre négatif que l'on veut, donné à l'avance.*

Les facteurs du produit différeront, en général, suivant la grandeur de ce nombre.

La proposition qui précède conduit immédiatement à celle-ci :

Si N désigne un nombre positif donné à volonté, $f(x)$ une fonction entière de degré m, à coefficients de la forme $p + qi$, il existe m systèmes, généralement distincts, de deux nombres A et B, et m seulement, satisfaisant à cette condition que le polynôme entier en i, $f(A + Bi)$, soit divisible par $i^2 + N$ (*), ou, ce qui revient au même, soit nul lorsqu'on y remplace i^2 par $-$ N.

(*) Le multiplicateur de $i^2 + N$ peut être zéro.

ÉTUDE D'UNE COURBE

AUTOUR D'UN POINT SINGULIER

Par M. Lucien Lévy.

(*Suite et fin*, voir p. 97.)

SECONDE MÉTHODE

Nous avons coupé la courbe par la droite dont l'équation est

$$(a) \qquad y = (t_1 + \varepsilon)x;$$

et, pour déterminer x, nous avons formé des équations telles que (5), (6), (8), (9) et (10) : nous désignerons l'une quelconque d'entre elles par l'équation

$$(b) \qquad F(\varepsilon, x) = 0.$$

Mais au lieu de résoudre cette équation par rapport à x, ce qui nous donne *les points de la courbe situés sur chaque sécante*, on peut la résoudre par rapport à ε et porter la ou les valeurs de ε dans l'équation (a) : on obtient ainsi *le lieu de ces points*. L'équation prenant la forme

$$y = t_1 x + Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots$$

on obtient une *parabole* qui sera toujours facile à construire. Un seul cas mérite de nous arrêter un instant : c'est celui ou l'équation (b) aurait des racines égales. Considérons par exemple l'équation (6bis) lorsqu'elle a ses deux racines égales : pour séparer les racines nous avions posé $x = x' + x''$. Nous poserons ici $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, considérant x comme l'infiniment petit principal : ε' sera la valeur principale de ε. Puis, ε' étant connu, l'équation (b) devient une équation entre ε'' et x, qu'on traitera comme la précédente.

Soit par exemple, l'équation déjà étudiée :

$$(y - x)^2 - 2(y - x)x^2 + x^4 - x^5 - y^6 = 0.$$

Nous avons trouvé en posant

$$y = (1 + \varepsilon)x,$$

la valeur principale de ε

$$\varepsilon' = x.$$

Posons alors $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' = x + \varepsilon''$. L'équation devient, après suppression du facteur x^2,

$$(x + \varepsilon'')^2 - 2(x + \varepsilon'')x + x^2 - x^3 - (1 + \varepsilon)^6 x^4 = 0$$

ou en la réduisant à ses termes d'ordre moindre :

$$\varepsilon''^2 - x^3 = 0,$$

$$\varepsilon'' = \pm x\sqrt{x}.$$

Nous avons donc $\quad \varepsilon = x \pm x\sqrt{x}$,

et les deux paraboles à construire dans le voisinage de l'origine seront représentées par

$$y = x + x^2 \pm x^2\sqrt{x}.$$

Elles remplacent, dans les mêmes limites, les deux branches qui constituent le point de rebroussement de seconde espèce.

Points à l'infini. — La même méthode s'applique aux points à l'infini. Si

$$y = cx + d$$

est l'équation d'une asymptote ; on coupera par

$$y = cx + d + \varepsilon\,;$$

et, en posant $x = \frac{1}{r}$, on aura, entre ε et r, une équation qu'on saura traiter comme les précédentes.

Pour les branches paraboliques, il sera préférable de former le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points où la courbe est coupée par une parallèle à direction asymptotique correspondant à l'équation

$$y = cx + \frac{1}{r}.$$

En remplaçant c par $c + \varepsilon$, et supposant ε infiniment petit ainsi que r, on aura des points, aussi éloignés que l'on voudra, sur la branche paraboliqae considérée.

L'équation en ε et r sera étudiée comme celles que nous avons déjà rencontrées.

Exemple. — Comme application des théories précédentes, nous étudierons la *courbe proposée au Concours de l'École Normale en 1888.*

$$x(x^2 - y^2)^2 + 4xy(x - y)^2 - 4y(2y - 3x) = 0.$$

1° *Disposition à l'origine.* — Les termes du plus faible degré sont $-4y(2y - 3x)$ d'où deux tangentes l'axe des $x(y = 0)$ et la droite OA, représentée par $(2y - 3x = 0)$. Pour voir comment la courbe se comporte dans le voisinage de Ox, coupons par

$$y = \varepsilon x.$$

En égalant à zéro les termes infiniment petits de l'ordre moindre, nous obtenons l'équation

$$x^3 + 12\varepsilon = 0;$$

d'où la disposition indiquée par la *fig. 15.*

La parabole auxiliaire dont nous parlons dans notre seconde méthode aurait ici pour équation $y = -\dfrac{x^2}{12}$. La branche COB touche Ox en quatre points confondus (contact du $3^{\text{ième}}$ ordre).

Tangente OA. — Nous poserons $y = \left(\dfrac{3}{2} + \varepsilon\right)x$. Les termes infiniment petits à conserver sont ici

$$\frac{3x^3}{2} - 12\varepsilon = 0$$

d'où la disposition représentée par la *fig. 16.*

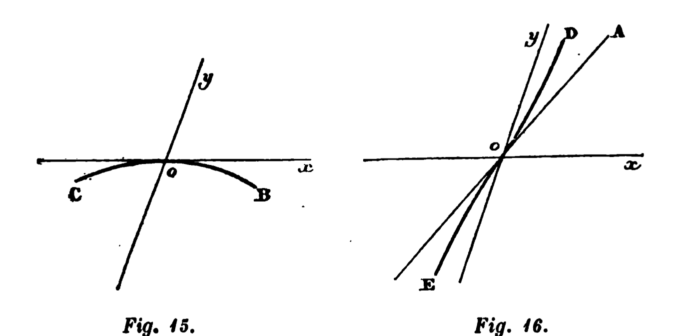


Fig. 15. *Fig. 16.*

La parabole auxiliaire indiquée par la seconde méthode a pour équation

$$y = \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{8}.$$

Le contact avec OA est du second ordre (inflexion).

2° *Branches infinies.* — Les termes du plus haut degré étant $x(x^2 - y^2)^2$, nous trouvons comme directions asymptotiques l'axe des y, qui est direction simple; et les bissectrices OF et OG qui sont directions doubles.

Direction asymptotique Oy. — Soit x infiniment petit; comme y est infiniment grand, nous poserons $y = \frac{1}{y'}$, et y' sera infiniment petit. L'équation entre x et y' devient, en se bornant aux termes d'ordre moindre :

$$x - 8y'^2 = 0.$$

x doit être positif et il lui correspond deux valeurs pour y', d'où deux valeurs infiniment grandes pour y. On a donc la disposition de la figure 18 (inflexion à l'infini).

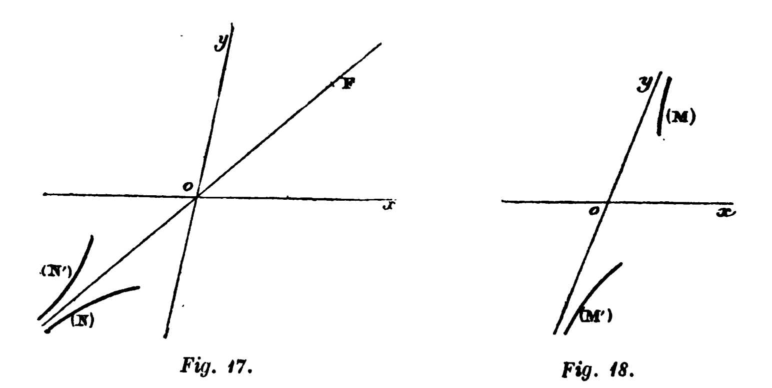


Fig. 17. *Fig. 18.*

Direction de la première bissectrice OF. — Posons $y = x + \varepsilon$, ε doit être infiniment petit pour que x soit infiniment grand; donc OF sera l'asymptote elle-même et nous poserons

$$x = \frac{1}{x'},$$

x' étant infiniment petit : l'équation réduite entre entre x' et ε sera

$$\varepsilon^2 + x' = 0.$$

Donc x' est négatif quelle que soit la valeur de ε et l'on a la disposition (rebroussement de première espèce à l'infini).

Direction de la deuxième bissectrice OG. — Après avoir constaté que l'asymptote correspondante est rejetée à l'infini, posons

$$(A) \qquad y = -x + \frac{1}{\lambda},$$

λ étant un infiniment petit.

Le faisceau des droites qui vont de l'origine aux points de rencontre de la courbe avec la droite (A) a pour équation, après suppression du facteur $x + y$,

$$x(x+y)(x-y)^2 + 4xy\lambda(x-y)^2 - 4y(2y-3x)\lambda^2(x+y)^2 = 0.$$

Une ou plusieurs de ces droites sont très peu inclinées sur la bissectrice; posons donc

$$y = (-1 + \varepsilon)x.$$

L'équation, réduite à ses termes d'ordre moindre, devient

$$4\varepsilon - 8\lambda = 0.$$

Donc λ et ε sont de même signe : la droite OP, qui correspond à ε positif, rencontre la courbe sur une droite parallèle à la direction asymptotique qui a une ordonnée à l'origine $\frac{1}{\lambda}$, infiniment grande et positive. La droite OP′, qui correspond à ε négatif, rencontre la courbe à l'infini au-dessous de la bissectrice. D'où la disposition indiquée (*fig. 19*) (branche parabolique).

Fig. 19.

La courbe, représentée par la figure 20, s'achèvera aisément au moyen des quelques remarques suivantes; les axes, ni leurs bissectrices ne rencontrent la courbe en des points réels à distance finie; la droite OA rencontre la courbe au point dont l'abscisse est $x = -\frac{24}{25}$. Les branches de courbe ne peuvent donc, sauf la branche OE, sortir de l'angle où nous les avons amorcées. Nous représentons, en pointillé, les parties de courbe qui raccordent de la manière la plus simple celles qui sont déjà trouvées.

On peut d'ailleurs étudier complètement cette courbe en la coupant par des droites pivotant autour de l'origine : mais

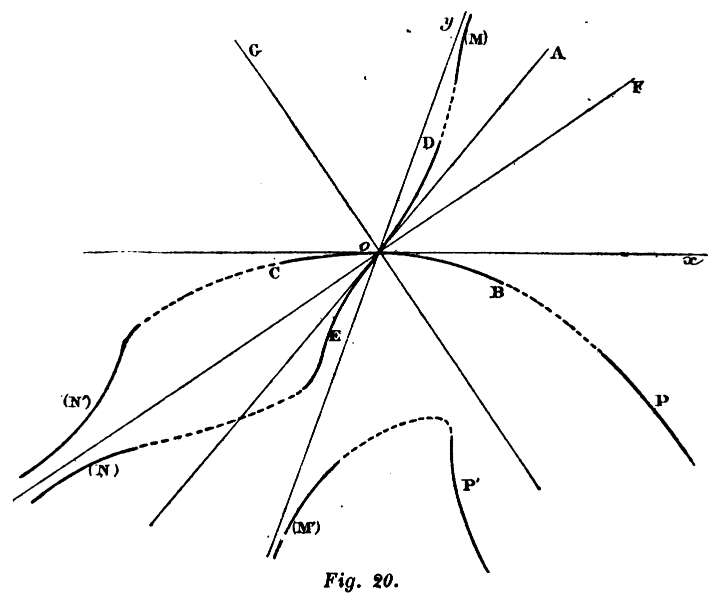


Fig. 20.

cette discussion sortirait du cadre que nous nous sommes tracé.

DES COORDONNÉES TRIPOLAIRES

Par M. Aug. **Poulain**, à Angers.

(*Suite*, voir pp. 3 et 51.)

IV. — *Transformations de coordonnées.*

29. *Expression de* λ, μ, ν *en fonction des coordonnées normales ou barycentriques de* M.

On a

(54) $$\lambda^2 \sin^2 A = y^2 + z^2 + 2yz \cos A,$$

(55) $$\sigma^2\lambda^2 = c^2\beta^2 + b^2\gamma^2 + 2bc\,\beta\gamma \cos A,$$

(56) $$= (\beta + \gamma)(c^2\beta + b^2\gamma) - a^2\beta\gamma.$$

Nous avons établi ailleurs (*) la première formule à l'aide d'un quadrilatère birectangle. La seconde s'en déduit facilement ou se tire directement de la formule de Stewart (voir la note de **13**). Cette dernière formule, en effet, donne la valeur de $\lambda_p = AA'$ (**); et, d'autre part, on obtient par des compositions de poids (ou de surfaces σ, $\beta+\gamma$).

$$(57) \qquad \frac{\lambda}{\lambda_p} = \frac{\beta+\gamma}{\sigma}.$$

Pour avoir la troisième formule, on remplace dans l'égalité (55), $2bc \cos A$ par sa valeur $b^2 + c^2 - a^2$. Cette relation (56) donne la formule habituelle de la médiane.

30. Remarques. — 1° Si l'on applique ces relations au pied A' de AM, elles donnent la valeur de λ_p, comme la formule de Stewart, mais sous une forme un peu différente (**65**) ;

2° Si λ est fixe, ces équations représentent un cercle de centre A et de rayon λ;

3° Dès lors, pour $\lambda = 0$, on a un cercle de rayon nul; par suite, les rapports des coordonnées des points cycliques ;

4° Inversement, si on applique (55) à ces points, on trouve ponr λ une valeur indéterminée, ce qui est exact. Car ces points sont sur tous les cercles, quel que soit leur centre et leur rayon. La même indétermination est donnée par (54); car si on met z en facteur dans le second membre, celui-ci prend la forme $\infty \times 0$.

31. *Question inverse.* — Dans ce qui suit, x, y, z, α', β', γ' désigneront les coordonnées absolues. Il sera facile de passer aux coordonnées relatives, α, β, γ, puisqu'on a

$$(58) \qquad \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\sigma}{S}.$$

(*) M. Poulain fait ici allusion à un article intitulé *Des coordonnées sous-trilinéaires* qu'il m'a remis il y a déjà quelque temps, mais que, faute de place, il ne m'a pas été possible de publier encore. G. L.

(**) Les segments λ_p, μ_p, ν_p constituent un système de coordonnées, celui des *céviennes* (J. E. 1888, p. 278). L'indice p, qui nous sert à les désigner, rappelle que ce sont des segments interceptés par le *périmètre* de ABC. Si dans (57) on remplace α par sa valeur tirée de (59), on a λ_p en fonction de λ, μ, ν. Pour le problème inverse on recourt à (70).

On a le choix entre les quatre formules suivantes :

$$(59)\ x.4S = \frac{8S}{a}\alpha' = -a\lambda^2 + b\cos C.\mu^2 + c\cos B.\nu^2 + abc\cos A,$$

$$(60)\ x.4Sa = 8S\alpha' = -a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2 - (\mu^2 + \nu^2 - a^2)bc\cos A,$$

$$(61)\ x.4S = \frac{8S}{a}\alpha' = b\cos C(\mu^2 - \lambda^2) + c\cos B(\nu^2 - \lambda^2) + abc\cos A,$$

$$(62)\ x.2a = 4\alpha' = (\mu^2 - \lambda^2)\cot g C + (\nu^2 - \lambda^2)\cot g B + a^2 \cot g A.$$

La formule (59) s'établit en prenant BC pour axe des abscisses et dès lors x pour ordonnée. On combine les expressions de λ^2, μ^2, ν^2. On pourrait aussi se contenter d'une simple vérification en remplaçant, dans (59), λ, μ, ν par leurs valeurs tirées de (55). Ou encore, regardons x comme fixe; la relation (59) représente, en tripolaires, une parallèle à BC, menée à la distance x (*). Il suffit donc de se procurer directement l'équation de cette parallèle. Or nous avons vu **(26)** que

$$(63)\qquad \Sigma a \cos \xi.\lambda^2 = \pm 4\delta_0 S$$

est l'équation d'une droite Δ faisant les angles ξ, η, ζ avec les côtés de ABC, et située d'un côté ou de l'autre de O, à une distance δ_0. Ici nous avons

$$(64)\ \xi = \pi, \quad \eta = C, \quad \zeta = B, \quad \pm \delta_0 = R\cos A - x;$$

et il faut choisir le signe — devant x. Car, si l'on fait descendre de A vers H_a le point M où Δ coupe la hauteur AH_a, les coordonnées de M varient de manière à faire diminuer chaque terme du premier membre. Il en est donc de même du second membre, ce qui oblige à prendre pour x le signe — ; on obtient ainsi la relation (59).

La formule (60) reproduit (59), si on ordonne par rapport à λ, μ, ν. En outre, (61) se déduit de (59) en remplaçant le coefficient a de λ^2 par $b\cos C + c\cos B$; et de là on passe à (62) en multipliant tout par a, et mettant 2S en évidence dans les différents termes.

32. Remarques. — 1° La dernière démonstration de (59) montre la loi des coefficients de λ^2, μ^2, ν^2 : ils égalent a, b, c multipliés respectivement par les cosinus des angles de BA

(*) Chacune des relations est donc l'équation générale de ces parallèles. Pour $x = 0$, on a l'équation du côté BC lui-même.

avec les trois côtés, ou encore ce sont les termes de l'identité

$$- a + b \cos C + c \cos B = 0.$$

33. 2° Pour $x = 0$, ces formules donnent λ_p, comme la formule de Stewart, mais sous une forme différente. Car cette dernière est

(65) $$a\lambda_p^2 = \mu' b^2 + \nu' c^2 - \mu'\nu' a,$$

μ', ν' ayant des signes, et vérifiant $\mu' + \nu' = a$.

On voit donc que toutes les formules de ce chapitre constituent une généralisation du problème de Stewart.

34. 3° Les formules (59) montrent que si on transforme en tripolaires l'équation barycentrique d'une droite, on trouve toujours une équation du second degré, et qu'elle est conforme au type signalé dans le théorème I **(2)**. Pour les coniques, on trouve une équation du quatrième degré, qui parfois s'abaisse à un degré moindre (voir **41**). Ainsi $\lambda \pm \mu = 2m$ représentent des coniques. De même, l'arc AB du cercle circonscrit a pour équations, en vertu des deux théorèmes de Ptolémée,

(66) $\nu c - \lambda a - \mu b = 0$, (67) $a\mu\nu + b\lambda\nu - c\lambda\mu = abc$,

(68) $$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos C - c^2 = 0.$$

Aucune ne rentre dans le type de **(2)**. La première est du premier degré. De la sorte, pour représenter le cercle complet, il faut remplacer le premier membre de (66) par un produit de trois facteurs, ce qui donne une équation du troisième degré. Elle monte au quatrième degré, si on multiplie de plus par le facteur positif $\lambda + \mu + \nu$. On raisonnerait d'une manière analogue sur (67) et (68).

35. *Expression de α, β, γ et ν_p en fonction de λ_p, μ_p.* — Ces valeurs n'ont aucune analogie avec celles des formules (59), où les données λ, μ paraissaient peu différentes. Appliquons (55) à λ_p. Comme $\alpha = 0$, l'équation est homogène par rapport à β et γ. On trouve ainsi

(69) $$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\lambda_p^2 - bc \cos A \pm \sqrt{a^2\lambda_p^2 - 4S^2}}{c^2 - \lambda_p^2};$$

ce qui donne un résultat de la forme $\beta = K\gamma$. De même con-

naissant μ_p, on aurait $\alpha = K'\gamma$; d'où

$$(70) \qquad \frac{\alpha}{K'} = \frac{\beta}{K} = \gamma.$$

Il y a quatre systèmes de valeurs, ainsi qu'on le voit *a priori*. De la formule (55), on tirera les quatre valeurs de ν_p^2. Il s'ensuit aussi que la relation entre λ_p, μ_p, ν_p est du huitième degré et ne contient que les puissances paires des variables.

(A suivre).

SUR LES SURFACES

ADMETTANT LES PLANS DE SYMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE RÉGULIER ET DU CUBE

Par M. **Ernest Lebon,**
Professeur de mathématiques, au Lycée Charlemagne.

(*Suite*, voir p. 103.)

II. — Surfaces tétraédriques.

Propriétés générales.

8. — Nous désignerons par S_3 les surfaces tétraédriques. L'équation (4) représente ces surfaces quand elles sont rapportées à trois axes dont chacun passe par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre régulier directeur. D'après cette équation :

1° *Toute surface* S_3 *admet trois sections circulaires concentriques, égales et rectangulaires, réelles ou imaginaires, dont le rayon est*

$$\rho = \sqrt{-\frac{a}{b}};$$

2° *Toute section d'une surface* S_3, *par un plan parallèle à une section circulaire, est une conique, dont le centre se projette au centre de la section circulaire.*

La conique déterminée par un plan perpendiculaire à un

axe, OZ par exemple, est une *ellipse* ou une *hyperbole* selon que l'on a

$$z^2 < b^2, \quad \text{ou} \quad z^2 > b^2;$$

elle se réduit à *deux droites* si

$$(z^2 - b^2)(a + bz^2) = 0:$$

les droites sont parallèles ou se coupent sur l'axe OZ suivant que l'on a

$$z^2 = b^2, \quad \text{ou} \quad bz^2 + a = 0.$$

Ces sections hyperboliques existant toujours, *toute surface* S_3 *a des nappes infinies.*

9. — Une surface S_3 a *trois axes* de symétrie, qui sont les trois droites joignant les milieux de deux arêtes opposées du tétraèdre directeur.

Quand a et b sont de signes contraires, la surface S_3 a *six sommets réels*, situés deux à deux sur les axes, à égale distance du centre du tétraèdre directeur; ces sommets sont les intersections des trois axes et d'une sphère concentrique au tétraèdre, de rayon ρ.

10. — Par chacun des axes OX, OY, OZ (*) passent deux des six plans de symétrie d'une surface S_3; ces deux plans sont perpendiculaires entre eux et sont bissecteurs des dièdres des plans des coordonnées. Conservant l'axe OZ, prenant pour nouveaux axes rectangulaires les traces OX′ et OY′, sur le plan XOY, des deux plans de symétrie passant par OZ, on trouve que l'équation des surfaces S_3 est

$$(7) \qquad 0 = a + b(x'^2 + y'^2 + z^2) + z(x'^2 - y'^2);$$

donc *les sections d'une surface* S_3 *par ses six plans de symétrie sont des cubiques égales.*

11. — Lorsqu'une figure est formée de deux parties ayant un axe de symétrie commun, nous dirons qu'elle est *orthosymétrique* par rapport à un plan perpendiculaire à cet axe, si elle est formée de deux parties telles que l'une est symétrique, par rapport à ce plan, de la position prise par l'autre, après que cette autre partie a tourné d'un angle droit autour de l'axe.

D'après les valeurs des axes des coniques sections d'une

(*) Voyez la figure p. 105.

surface S_3 par des plans perpendiculaires à un axe OZ, on voit que *toute surface* S_3 *est orthosymétrique par rapport à chacun de ses trois plans de sections circulaires.*

Classification.

12. — Prenant l'équation (4) pour représenter les surfaces S_3, on trouve qu'elles se divisent en deux classes : pour les surfaces de la *première classe*, les coefficients a et b sont de même signe; pour les surfaces de la *seconde classe*, les coefficients a et b sont de signes contraires.

Les deux droites parallèles que le plan $z = b$, (ou que le plan $z = -b$), détermine dans une surface S_3 ont pour équations, respectivement,

$$x + y = \pm\sqrt{\frac{a + b^3}{-b}}, \quad \text{ou} \quad x - y = \pm\sqrt{\frac{a + b^3}{-b}}.$$

Ces deux couples rectangulaires de droites parallèles sont imaginaires pour les surfaces S_3 de la première classe; dans le cas des surfaces S_3 de la seconde classe, on peut avoir :

$$a + b^3 > 0, \qquad a + b^3 = 0, \qquad a + b^3 < 0;$$

d'où il résulte *trois espèces* de surfaces S_3 de la seconde classe.

Donc on peut dire que les surfaces S_3 se divisent en *quatre genres*, caractérisés par les conditions suivantes si l'équation (4) les représente :

Genre 1 : $a > 0, \quad b > 0.$
Genre 2 : $a < 0, \quad b > 0, \quad a > -b^3.$
Genre 3 : $a < 0, \quad b > 0, \quad a = -b^3.$
Genre 4 : $a < 0, \quad b > 0, \quad a < -b^3.$

Contour apparent sur un plan de section circulaire.

13. — L'équation du contour apparent d'une surface S_3 sur un plan de section circulaire, le plan XOY par exemple, est

$$(8) \qquad 0 = ab + b^2(x^2 + y^2) - x^2y^2;$$

ce contour est symétrique par rapport aux axes OX et OY et par rapport aux bissectrices OX′ et OY′ des angles de ces axes.

Le contour apparent dans l'espace, par rapport au plan XOY, d'une surface S_3, est représenté par les équations (4) et (8); on

peut aussi dire qu'il est l'intersection de la surface (4), ou du cylindre (8), et du paraboloïde hyperbolique isocèle

(9) $$o = bz + xy;$$

on peut encore dire qu'il est l'intersection du paraboloïde (9) et de l'hyperboloïde de révolution

(10) $$o = a + b(x^2 + y^2 - z^2).$$

Le contour apparent sur le plan XOY d'une surface S_3 peut être construit par points, avec la règle et le compas, en coupant les surfaces (9) et (10) par des plans parallèles au plan YOZ.

14. — Le contour apparent dans l'espace par rapport au plan XOY d'une surface S_3 du troisième genre est un quadrilatère gauche formé par quatre arêtes d'un tétraèdre régulier, dont la longueur est égale à $2\sqrt{2}\,b$.

Droites situées sur les surfaces Tétraédriques.

15. — Soient

(11) $$x = mz + p, \qquad y = nz + q$$

les équations d'une droite. Cherchant l'équation qui fournit la coordonnée z des points d'intersection de la droite (11) et de la surface (4), égalant à zéro les coefficients et le terme indépendant de z, de cette équation, on trouve quatre équations auxquelles doivent satisfaire les paramètres m, n, p, q pour que la droite (11) soit sur la surface (4). Les systèmes de solutions communs à ce système d'équations exigent que m ou n soit nul.

1° Soit $m = o$. La troisième équation de condition donne

$$q = o, \qquad \text{ou} \qquad bn + p = o.$$

A $q = o$ correspondent quatre droites de la surface S_3, deux à deux situées dans deux plans perpendiculaires à l'axe OX, en deux sommets, et se coupant en ces sommets.

A $bn + p = o$ correspondent quatre droites de la surface S_3, deux à deux situées dans deux plans perpendiculaires à l'axe OX, aux deux points de coordonnée $z = + b$ ou $z = - b$, et parallèles à une arête du tétraèdre directeur.

2° Soit $n = o$. On obtient encore huit droites, disposées,

comme les précédentes, dans quatre plans perpendiculaires à l'axe OY.

On trouve aussi huit droites situées de même dans quatre plans perpendiculaires à l'axe OZ.

On reconnaît que *les surfaces* S_2 *du troisième genre et celles du quatrième genre seules contiennent des droites réelles, au nombre de vingt-quatre sur les surfaces du quatrième genre et de six sur celles du troisième genre.*

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. VIGARIÉ.

La cubique étudiée dans la question 114 (J.S. 1886) possède déjà beaucoup de propriétés, je me permets de vous en indiquer d'autres que je crois nouvelles :

1° *La cubique est analagmatique dans la transformation par points inverses;*

2° *Elle passe par les points* H', *anticomplémentaires de l'orthocentre* H;

3° *Sa tangente en* H' *est* $H'H_2'$, H_2' *désignant le point inverse de* H';

4° *Ses tangentes aux points* I, I_a, I_b, I_c, *centres des cercles tangentes aux trois côtés du triangle sont* $H'I, H'I_a, H'I_b' H'I_c$.

5° *Ses tangentes en* A, B, C *sont* $H_2'A$, $H_2'B$, $H_2'C$, etc.

Extrait d'une lettre de M. TARRY *(Solution de la question 263).*

La question proposée par M. Mannheim, sous le numéro 263 :

Une droite se déplace de façon que trois de ses points restent sur trois plans parallèles à une même droite. Démontrer qu'un point de la droite mobile se déplace sur un plan.

se démontre simplement à l'aide de la proposition suivante :

Si trois masses, sommets d'un triangle de similitude con-

stante, sont animés de mouvement rectilignes, leur centre de gravité possède aussi un tel mouvement.

(Voir la lettre de M. Neuberg, J.M.S, 1888, page 111.)

En effet, soient A, B, C les trois points qui se déplacent sur les plans donnés et D un point quelconque de la droite.

On peut toujours déterminer des masses m, m', m'', placées en A, B, C, et ayant pour centre de gravité le point D.

Projetons la droite mobile sur un plan perpendiculaire à la droite parallèle aux plans donnés.

Soient A′, B′, C′, D′ les projections de A, B, C, D.

Si l'on place en A′, B′, C′ des masses égales à m, m', m'' leur centre de gravité est évidemment D′.

Les points mobiles A′, B′, C′ sont les sommets d'un triangle A′B′C′ de similitude constante et ils décrivent des lignes droites.

Ainsi, le point D′ décrit une ligne droite, et le point D se déplace sur un plan.

CONCOURS GÉNÉRAL (1889)

Mathématiques spéciales.

Étant donnés un cercle ayant pour centre le point O et une parabole P, on considère toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes au cercle O et à la parabole P.

Cela posé, on demande de trouver :

1° L'enveloppe des polaires A du point O par rapport aux coniques C; l'enveloppe des tangentes T aux coniques C, telles que les normales au point de contact passent par le point O; l'enveloppe des axes des coniques C.

2° Les lieux géométriques des pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les polaires A, sur les tangentes T et sur les axes des coniques C.

EXERCICES ÉCRITS

21. — Soient P, Q deux paraboles ayant le même axe et le même sommet, une droite mobile Δ touche P en M et rencontre Q aux points A, B. Sur OM, on prend OI = OA; trouver le lieu géométrique du point I, ainsi obtenu.

Notes sur l'exercice 20.

1° Soient x', y'; x'', y'' les cordonnées des points P, Q. En identifian les deux équations

$$\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1\right)\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0,$$

$$\left(\frac{a^2x}{x'}-\frac{b^2y}{y'}-c^2\right)\left(\frac{a^2x}{x''}-\frac{b^2y}{y''}-c^2\right)+\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0,$$

et en observant que

$$\frac{x'x''}{a^2}=\frac{1-\dfrac{y_0^2}{b^2}}{\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}},\quad \frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{2-\dfrac{x_0}{a^2}}{1-\dfrac{y_0^2}{b^2}},\ \text{etc...}$$

on trouve

$$\frac{x_1}{x_0}=\frac{a^2x_0^2+(a^2+c^2)y_0^2-c^2(a^2+b^2)}{x_0^2(c^2-b^2)-y_0^2(a^2+c^2)-c^5},$$

$$\frac{y_1}{y_0}=\frac{b^2y_0^2+(b^2-c^2)x_0^2+c^2(a^2+b^2)}{x_0^2(c^2-b^2)-y_0^2(a^2+c^2)-c^4}.$$

2° En remplaçant : x_0 par $a\cos\varphi$; y_0, par $b\sin\varphi$, on trouve

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

résultat évident *a priori*.

3° En supposant $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$, on a pour le lieu décrit par le point M' :

$$\varphi=(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}\frac{b^2\cos^2\omega+a^2\sin^2\omega}{b^2\cos^2\omega(a^2-3b^2)-a^2\sin^2\omega(3a^2-b^2)}.$$

La courbe correspondante U affecte trois formes très différentes, si l'on suppose successivement,

$$a^2<3b^2,\qquad a^2=3b^2,\qquad a^2>3b^2.$$

En étudiant l'intersection de U avec l'ellipse proposée, on trouve qu'il y a un quadruple contact : imaginaire, dans le premier cas ; réel, dans le troisième cas. Enfin dans le cas où $a^2=3b^2$, le contact a lieu au sommet de l'ellipse.

4° En supposant $x_0=-a$, on trouve $x_1=a$, et

$$\frac{y_1}{b^2}\left[y_0^2(a^2+c^2)+b^4\right]+y_0^3+y_0(a^2+c^2)=0.$$

Les racines de cette équation en y_0, dans laquelle y_1 est une quantité supposée connue, sont AP', AQ', AR'. On vérifie de la sorte les deux propositions énoncées.

Nota. — Nous avons reçu des solutions de l'exercice 20, de MM. Rezeau conducteur des Ponts et Chaussées à La Roche-sur-Yon, et Ravier, maître auxiliaire au Lycée Louis-le-Grand.

QUESTIONS D'EXAMENS

4. — *La tangente de l'angle de deux droites imaginaires conju guées est une imaginaire pure.*

Si l'on pose :

$$P \equiv Ax + By + C, \qquad Q \equiv A'x + B'y + C',$$

les deux droites sont représentées, respectivement, par

$$P + Qi = 0, \quad \text{et} \quad P - Qi = 0.$$

La formule qui donne la tangente de l'angle V de deux droites, étant appliquée à ces deux équations, devient

$$\operatorname{tg} V = 2i \frac{BA' - AB'}{A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2}.$$

5. — *Quel est l'ordre infinitésimal de* z,

$$z \equiv f(a + 3h) - 3f(a + 2h) + 3f(a + h) - f(a),$$

h *désignant l'infiniment petit principal?*

En appliquant la formule de Taylor, on trouve que z est un infiniment petit du troisième ordre.

6. — *Calculer le déterminant* Δ,

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la première colonne à la troisième, on a

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos^2 a \\ 1 & \cos b & \cos^2 b \\ 1 & \cos c & \cos^2 c \end{vmatrix}.$$

On reconnaît là un déterminant de Vandermonde, et l'on a

$$\Delta = 2(\cos a - \cos b)(\cos b - \cos c)(\cos c - \cos a),$$

ou

$$\Delta = 16 \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{b+c}{2} \sin\frac{c+a}{2} \sin\frac{b-a}{2} \sin\frac{c-b}{2} \sin\frac{a-c}{2}.$$

On peut généraliser cet exercice. Par exemple, proposons-nous de calculer Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ 1 & \cos b & \cos 2b & \cos 3b \\ 1 & \cos c & \cos 2c & \cos 3c \\ 1 & \cos & \cos 2d & \cos 3d \end{vmatrix},$$

Les formules

$$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a, \qquad \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a,$$

permettent d'écrire Δ sous la forme

$$\Delta = 2.4. \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos^2 a & \cos^3 a \\ 1 & \cos b & \cos^2 b & \cos^3 b \\ 1 & \cos c & \cos^2 c & \cos^3 c \\ 1 & \cos d & \cos^2 d & \cos^3 d \end{vmatrix}, \text{ etc...}$$

QUESTION 183

Solution par M. H. Brocard.

Sur une ellipse E, *on considère un point mobile* M. *Abstraction faite de la normale en* M, *on peut, de ce point, mener à l'ellipse considérée trois autres normales. Prenons deux de ces droites* MA MB; *les tangentes aux points* A *et* B *pieds de ces normales, se coupent en* I. *Démontrer que le lieu de* I *est une ellipse ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée.* (G. L.)

L'ellipse ayant pour équation

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2;$$

Soient (x, y) les coordonnées d'un point I du plan.

Le point de rencontre M des normales menées aux points de contact A, B des tangentes à l'ellipse issues du point I a pour coordonnées

$$\alpha = \frac{c^2x(b^2 - y^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}, \qquad \beta = -\frac{c^2y(a^2 - x^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}.$$

Ce point doit être sur l'ellipse. L'équation du lieu des points (x, y) est donc

$$(1) \qquad b^2c^4x^2(b^2-y^2)^2+a^2c^4y^2(a^2-x^2)^2-a^2b^2(a^2y^2+b^2x^2)^2=0.$$

Mais cette solution s'applique également à la recherche du lieu du pôle d'une corde normale à l'ellipse au point M. Or, le pôle de la normale parallèle à une direction $y = mx$, a pour coordonnées

$$c^2x = -a^2\sqrt{a^2 + b^2m^2}, \qquad y = -\frac{b^2x}{a^2m}.$$

L'élimination de m donne l'équation

$$a^6y^2 + b^6x^2 - c^4x^2y^2 = 0.$$

L'expression $a^6y^2 + b^6x^2 - c^4x^2y^2$ doit donc entrer en facteur dans le premier membre de l'équation (1). On trouve, en effet, que celui-ci est le produit de

$$a^6y^2 + b^6x^2 - x^2y^2(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)$$

par

$$a^2x^2 + b^2y^2 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2$$

et cette dernière quantité, égalée à zéro, représente l'ellipse cherchée.

QUESTION 264

Solution par M. Le Huédé, étudiant à la Faculté des Sciences d'Angers.

Démontrer que le nombre des variations de la suite de Sturm, pour une équation donnée, lorsqu'on y fait x $= \alpha$, *est égal au nombre des racines réelles de cette équation, qui sont supérieures à* α, *augmenté du nombre* DES COUPLES (*) *de racines imaginaires.*

(Hermite.)

Soit V, V_α les nombres de variations pour $+\infty$ et α; n le nombre des racines réelles supérieures à α; i le nombre des racines imaginaires. — On sait que $i = 2V$ (V. de Longchamps, *Alg.*, § 496). Par suite $n = V_\alpha - V = V_\alpha - \frac{i}{2}$. Donc...

QUESTIONS PROPOSÉES

267. — Soit A un point arbitrairement choisi sur une hyperbole équilatère, et soient B et C les extrémités d'un diamètre quelconque de cette courbe. La tangente en A à cette hyperbole équilatère est symédiane du triangle ABC.

(Ce théorème permet, connaissant le centre et deux points d'une hyperbole équilatère, de construire les tangentes en ces points.)

Corollaire. — Si un cercle et une hyperbole équilatère sont concentriques, les tangentes à l'hyperbole aux extrémités

(*) Par une erreur de transcription ces deux mots avaient été oubliés dans l'énoncé publié p. 96. *G. L.*

d'un de leurs diamètres communs sont perpendiculaires à l'autre diamètre commun. *(d'Ocagne.)*

268. — On donne, dans un plan, une circonférence C, une droite D et une direction Δ. On prend sur la circonférence C un point variable M; on mène la normale, en ce point, à la circonférence C; cette normale rencontre D en un point B. Par le point B on mène une parallèle à Δ. On demande le lieu du point de rencontre de cette parallèle et de la perpendiculaire abaissée, du point M, sur la droite D.

Nota. — Même problème, en remplaçant la circonférence C par une conique quelconque, par une courbe du troisième ordre; et, plus généralement, par une courbe d'ordre m.

(R. Malloizel.)

269. — On considère une conique H et un point fixe M.

De M, comme centre, avec un rayon variable, on décrit un cercle Γ. Trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes à H, Γ.

Ce lieu est une Strophoïde oblique. *(G. L.)*

ERRATA

1° p. 117; l. 23; *au lieu de*

$$\alpha^2(p - a)$$

lisez

$$-\alpha^2(p - a).$$

2° p. 118; ligne 18; *au lieu de*

$$AO_a, \quad BO_b, \quad CO_c,$$

lisez

$$AO_a, \quad BO_a, \quad CO_a..$$

3° p. 118; l. 25; *au lieu de*

$$-ar_a(2R + r_a),\ br_b(2R - r_b),\ cr_a(2R - r_c)$$

lisez

$$-ar(2R + r),\ br_c(2R - r_c),\ cr_b(2R - r_b).$$

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11988-6-9.

SUR LES BRANCHES INFINIES DES COURBES ALGÉBRIQUES

Par **M. E. Catalan.**

M. Lucien Lévy vient de publier, dans le *Journal de Mathématiques*, un petit mémoire intitulé : « *Étude d'une courbe autour d'un point singulier* ». La lecture de ce travail m'a rappelé une *théorie des branches infinies*, que j'enseignais, en 1848, au Lycée Charlemagne (*). Les deux questions n'en font qu'une (**), au fond. Car si une courbe C possède une branche infinie, sa transformée C', *par rayons vecteurs réciproques* (***) passe à l'origine, la rédaction du journal, convaincue qu'il peut être utile d'exposer, sous des formes différentes, une même théorie, a bien voulu donner l'hospitalité à la vieille Note suivante, tirée de l'ouvrage cité (****).

(*) *Mathématiques supérieures. — Application de l'algèbre à la géométrie* (352 p. in-4°, litographiées).

(**) Dans l'enseignement moderne, l'étude des points à l'infini se déduit de celle des points à distance finie en utilisant les formules de Newton *.

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{Y}{X}.$$

Dans cette transformation, qui est homographique, à une droite δ, correspond une droite Δ; à une courbe u, une courbe U. D'ailleurs, soit par des considérations géométriques, soit en se servant de la formule facile à démontrer

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = x^3\frac{d^2y}{dx^2},$$

on établit le principe suivant :

A une branche Γ *de* U, *asymptote à une droite* Δ, *correspond, dans* u, *un bras* γ *tangent à la droite correspondante* δ; *de plus, les concavités se correspondent.*

Il faut entendre par là, qu'elles sont, en même temps, tournées vers la partie positive, ou vers la partie négative de l'axe des y.

On peut aussi utiliser les formules de la transformation réciproque.

$$xX = 1, \quad yY = 1;$$

Mais les formules de Newton donnent les résultats cherchés, plus rapidement.

* Ces formules ont été données par Newton dans le 1er livre des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (Lemme XXII) ; leur considération a conduit Waring aux formules générales de la transformation homographique (V. Chasles, *Traité des sections coniques*, p. 164). (G. L.)

(***) Pour abréger, on peut dire que les courbes C, C' sont *inverses*.

(****) Pages 142 à 152.

199. — Soit

(1) $F_0(y)x^m + F_1(y)x^{m-1} + \ldots + F_m(y) = 0$

l'équation d'une courbe algébrique : $F_0(y)$, $F_1(y)$, ... $F_m(y)$ sont des polynômes entiers. Cherchons, en premier lieu, quels sont les caractères au moyen desquels on pourra reconnaître que l'équation (1) est vérifiée par une valeur *finie* de y_1 $y = \beta$, jointe à une valeur *infinie* de x. Cette recherche repose sur les considérations suivantes.

200. — Soit l'équation à une seule inconnue :

(2) $Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots Sx + T = 0.$

Supposons, pour plus de simplicité, que les coefficients B, C, ... S, T soient *constants*. Supposons, en outre, le coefficient A fonction d'une variable arbitraire a, de telle sorte que, pour une valeur réelle α, de ce paramètre, A devienne égal à zéro. Si, en donnant à a, une valeur $\alpha + h$, très peu différente de α, on fait acquérir, à l'équation (2), une racine réelle, positive ou négative, mais *très grande ;* et si de plus cette racine, constamment réelle, croît au delà de toute limite quand h converge vers zéro, on dit que l'*équation* (2) *a une racine infinie pour* $a = \alpha$, *c'est-à-dire quand le coefficient* A *se réduit à zéro.*

Ainsi, l'équation $ax^3 - 1 = 0$, dans laquelle a est supposé *positif*, a une racine égale à $+\infty$ quand $a = 0$. Cette même équation admet une racine égale à $-\infty$ si, après avoir supposé a négatif, on fait $a = 0$.

201. — Pour que l'équation (2) *ait une racine infinie, il faut que le coefficient* A, *de son premier terme, soit égal à zéro.*

En effet, tant que ce coefficient est différent de zéro, on peut assigner une *limite supérieure*, soit des racines positives, soit des racines négatives.

202. — La condition $A = 0$ *n'est pas suffisante.*

Il suffit, pour justifier cette proposition, de considérer l'équation $a^2x^2 + 1 = 0$, dont les racines sont imaginaires, quelle que soit la valeur réelle attribuée au paramètre a.

L'équation $a^2x^4 + x^2 - 1 = 0$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires. Mais comme $+1$ et -1 sont *limites* des racines, il n'est pas permis de dire que cette équation a des racines infinies, pour $a = 0$.

203. — Après ces explications préliminaires, revenons à l'équation (1). Posons

$$(3) \qquad F_0(y) = o.$$

Soit β une racine réelle de cette équation (3); et supposons d'abord qu'elle soit *simple*, c'est-à-dire que la dérivée, $F'_0(y)$, ne s'annule pas quand on fait $y = \beta$.

Remplaçons, dans le premier membre de notre équation (1), y par $\beta + h$, h étant une quantité fort petite. Il peut arriver, par suite de cette substitution, que quelques-uns des polynômes $F_1(y)$, $F_2(y)$ se réduisent à zéro; mais *ils ne s'annuleront pas tous*; car alors le premier membre admettrait le facteur $y - \beta$, ce que l'on ne doit pas supposer.

Soit $F_p(y)$ le premier coefficient qui ne s'annule pas pour $y = \beta$; alors notre équation deviendra

$$(4) \quad h[F'_0(\beta)+\varepsilon_0]x^m+\varepsilon_1x^{m-1}+\varepsilon_2+\ldots+[F_p(\beta)+\varepsilon_p]+\ldots x^{m-p}=o.$$

Dans celle-ci, ε_0, ε_1, ... ε_p sont des quantités qui renferment h comme facteur, et qui, conséquemment, pourront devenir moindres que toute quantité donnée, quand on attribuera une valeur suffisamment petite à h.

204. — Remarquons, tout de suite, que pour appliquer nos raisonnements au cas d'une équation incomplète, il suffirait de supposer $\varepsilon_1 = o$, $\varepsilon_2 = o$,...

205. — Remarquons encore que l'on peut toujours disposer du signe de h et du signe de x, de manière à rendre *positif* le terme $hF'_0(\beta)$, et *négatif* le terme $F_p(\beta)x^{m-p}$. (On changera, s'il le faut, les signes de tous les termes.) Supposons que l'on ait fait cette *préparation*, et mettons les signes en évidence : l'équation (4) deviendra

$$(5) \quad h[F'_0(\beta) + \varepsilon_0]x^m + \varepsilon_1x^{m-1} + \ldots - [F_p(\beta) + \varepsilon_p]x^{m-p} + \ldots = o.$$

206. — On sait que si un polynôme est ordonné suivant les puissances décroissantes d'une variable, x, il est toujours possible d'assigner, à cette variable, une valeur positive telle, que si x croît indéfiniment, à partir de cette valeur particulière, le polynôme conserve le signe de son premier terme, et croît au-delà de toute limite. Conséquemment, on peut trouver un nombre N qui, substitué à x, rende *positive* la quantité

$$h[F_0(\beta) + \varepsilon_0]x^m + \varepsilon_1x^{m-1} + \ldots,$$



et *négative* la quantité

$$- [F_p(\beta) + \varepsilon_p]\, x^{m-p} + \ldots$$

On peut, en outre, déterminer ce nombre N, de manière que tout nombre plus grand satisfasse aux mêmes conditions. Enfin, ce nombre N peut être choisi de telle sorte que chacun des termes $\varepsilon_1 x^{m-1}$, $\varepsilon_2 x^{m-2}$,... soit, relativement à $hF_0(\beta)$, aussi petit qu'on voudra.

En effet, si l'on veut que $\varepsilon_1 x^{m-1}$, par exemple, soit inférieur à $hF'_0(\beta)x^m\frac{1}{K}$, K étant un très grand nombre donné, il suffira de satisfaire à l'inégalité

$$\frac{\varepsilon_1}{h} < \frac{x}{KF'_0(\beta)}.$$

Or, ε_1 contenant h en facteur, le rapport $\frac{\varepsilon_1}{h}$ a pour limite une quantité *finie* λ (*). Donc ce rapport sera rendu moindre que $\frac{x}{KF'_0(\beta)}$, si l'on attribue à x une valeur suffisamment grande.

207. — Concevons que l'on ait remplacé, dans le premier membre de l'équation (5), x par un nombre N suffisamment grand. Ce premier membre prendra la forme

$$h[F_0(\beta) + E]N^m - [F_p(\beta) + E_1]N^{m-p},$$

en représentant par E, E_1, des quantités aussi petites qu'on voudra, et dont la première diminue indéfiniment avec h. On pourra, évidemment, trouver une valeur η, de h, telle, que la quantité qui vient d'être écrite soit négative. Donc, pour $x = N$, $h = \eta$, le premier membre de l'équation (5) est négatif. Et comme, en conservant cette même valeur η de h, on peut faire croître x, à partir de N, de manière à rendre ce premier membre positif, l'équation (5) aura une racine positive, plus grande que N.

En d'autres termes : *la quantité positive* h *peut être rendue assez petite pour que l'équation* (5) *ait une racine positive plus grande que tout nombre donné* N. C'est ce qu'il fallait démontrer.

(*) Ce raisonnement est peu rigoureux ; mais il est aisé de le rendre tel (mai 1889).



208. — Ajoutons que, *si l'on fait décroître indéfiniment* h, *à partir de* η, *la racine positive de l'équation* (5) *croîtra au delà de toute limite.*

En effet, si N′ est la racine correspondant à $h = \eta$, on aura

$$\eta[F_0(\beta) + E]N'^m - [F_p(\beta) + E_1]N'^{m-1} = 0;$$

d'où, en remplaçant η par une quantité plus petite, η' :

$$\eta'[F_0'(\beta) + E]N'^{m-p} - [F_p(\beta) + E_1]\, N'^{m-p} < 0.$$

On devra donc, pour satisfaire à l'équation (5), dans laquelle on suppose $h = \eta'$, remplacer x par un nombre N″, supérieur à N′. *(A suivre).*

SUR LA CONSTRUCTION DES TANGENTES
AUX CUBIQUES ET AUX QUARTIQUES

Par M. **Duchêne**, élève à l'École Polytechnique.

On sait que Chasles (*) a indiqué une construction générale de la tangente en un point d'une courbe de degré quelconque. Mais il n'est pas sans intérêt de rechercher, pour des courbes particulières, des constructions plus simples que celles qui découlent de la solution générale donnée par Chasles, solution qui nécessite l'emploi d'un instrument de mesure (compas ou décimètre).

Nous donnerons deux constructions au moyen de la règle seulement 1° pour les cubiques, 2° pour les quartiques.

La première est fondée sur ce théorème connu : *Trois cubiques qui ont huit points communs en ont un neuvième.*

Si l'on considère *(fig. 1)* deux droites AC, FD coupant en A,B,C,D.E,F la cubique, sur les droites CD, BE, DF, il y aura trois autres points α, β, γ de la courbe. Ces points doivent être en ligne droite d'après le théorème précédent.

Si deux de ces points, C et D se réunissent, la tangente s'obtiendra comme nous allons l'indiquer. Par le point donné

(*) Chasles : *Aperçu historique*, in-4°,1875, Paris. Pages 221 et 222; note au bas de la page.

M (*fig.* 2), on mène deux droites qui coupent en AB et EF la cubique. On trace BE, AF qui la coupent de nouveau en β, γ.

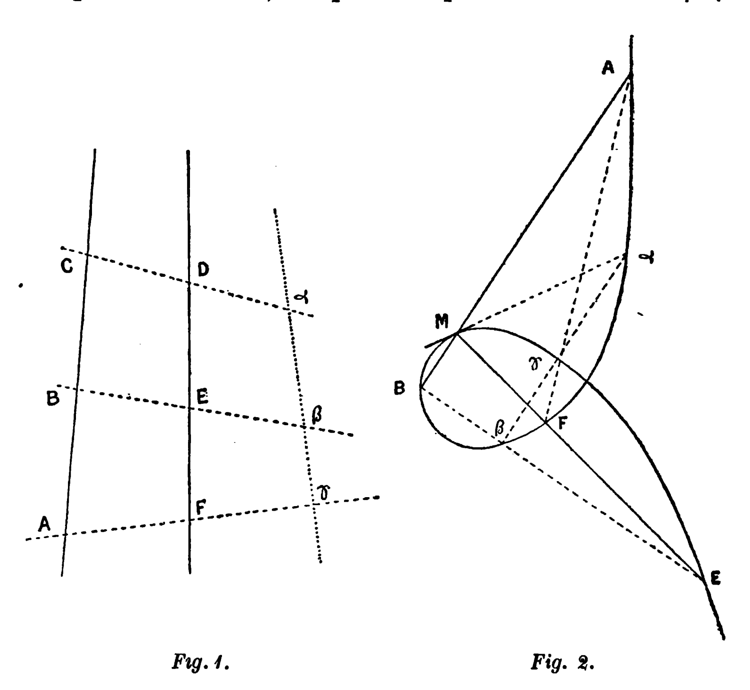


Fig. 1. *Fig.* 2.

La droite $\beta\gamma$ rencontre la courbe en un troisième point α qui appartient à la tangente.

Pour les quartiques, la solution est analogue; mais la droite $\alpha\beta\gamma$ est remplacée par une conique. Voici le principe de la construction. Soient (*fig.* 3) deux droites coupant la courbe en A,B,C,D ; E,F,G,H. Sur DH, CG, BF, AE, il existe huit points qui sont sur une conique, comme il est aisé de le voir d'après le théorème que nous avons cité pour les cubiques et d'après le théorème analogue pour les quartiques (trois quartiques qui ont quatorze points communs en ont deux autres). La construction se déduit de la considération de cette conique en supposant deux des points réunis.

La seconde construction que nous allons donner est fondée sur la remarque suivante :

Soit un triangle *(fig. 4)* dont les côtés ont pour équations

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 0.$$

Soit M un point (x_1, y_1). L'équation

$$xy_1z_1 + yx_1z_1 + zx_1y_1 = 0,$$

représente une droite qui est la dernière polaire du point par rapport à la cubique $xyz = 0$.

La forme de cette équation prouve que la droite passe par l'intersection de chacun des côtés du triangle avec la polaire du point M par rapport aux deux autres côtés.

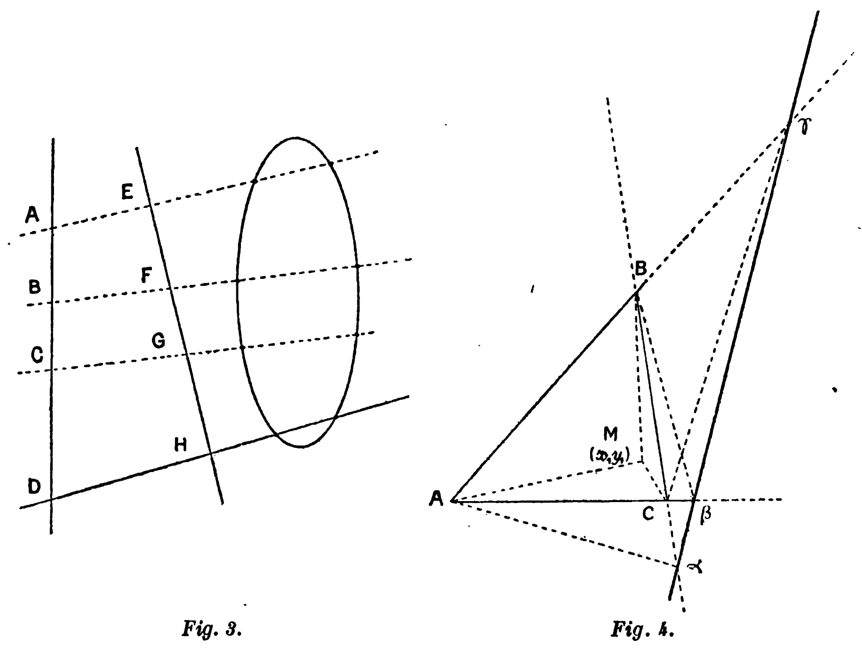


Fig. 3. *Fig. 4.*

Considérons maintenant deux courbes de même ordre, ayant pour équations $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$. La courbe représentée par $f + \lambda g = 0$, passera par tous leurs points d'intersection. Les dernières polaires d'un point x, y, par rapport à ces trois courbes, sont concourantes, ce qu'on voit en formant leurs équations. Cela dit, donnons-nous une courbe C, et cherchons deux courbes de même ordre que C, ayant avec elle tous leurs points d'intersection communs, et telles qu'on puisse construire

les dernières polaires d'un point, par rapport à chacune d'elles. Si le point P est sur la courbe C, la tangente en P joindra à ce point l'intersection de ses dernières polaires par rapport aux deux courbes.

Pour les cubiques, nous savons trouver deux systèmes de trois droites répondant à la question (construction précédente *fig. 1*). Nous savons aussi trouver la dernière polaire d'un point par rapport à trois droites. Le problème est donc résolu.

Pour les quartiques, on est conduit à chercher la dernière polaire d'un point par rapport à deux droites et une conique. Nous n'insisterons pas ici sur ce problème.

La droite polaire d'un point existe dans un polygone comme dans un triangle. Par exemple, dans le cas un quadrilatère, l'équation de cette droite est

$$XY_1Z_1T_1 + YZ_1T_1X_1 + ZT_1X_1Y_1 + TX_1Y_1Z_1 = 0.$$

La polaire passe par les sept points suivants : 1° intersection des polaires du point par rapport aux côtés XY d'une part, ZT de l'autre; 2° XZ et YT; 3° XT et YZ, puis les intersections de chacun des côtés avec la polaire du point par rapport au triangle formé par les trois autres.

Les équations :

$$XY_1Z_1 + YZ_1X_1 + ZX_1Y_1 = 0,$$
$$XYZ_1 + YZX_1 + ZXY_1 = 0$$

font correspondre, à un point M du plan du triangle, une droite Δ et une conique Γ. La considération de ces trois éléments associés M, Δ, Γ, conduit à diverses propriétés assez remarquables.

NOTE SUR LA STROPHOÏDE

Par M. **Balitrand,** élève à l'École Polytechnique.

Considérons une strophoïde droite, et désignons par S le sommet, par O le point double, par SX l'axe de la strophoïde ; enfin par Δ et D l'asymptote et sa parallèle menée par le point double.

Une sécante, issue de S, rencontre la strophoïde aux points A, B et la droite D en M, de telle sorte que l'on a

$$AM = MB = OM.$$

L'angle AOB est droit, et le cercle circonscrit au triangle AOB est tangent, en O, à l'axe de la strophoïde. Il en résulte

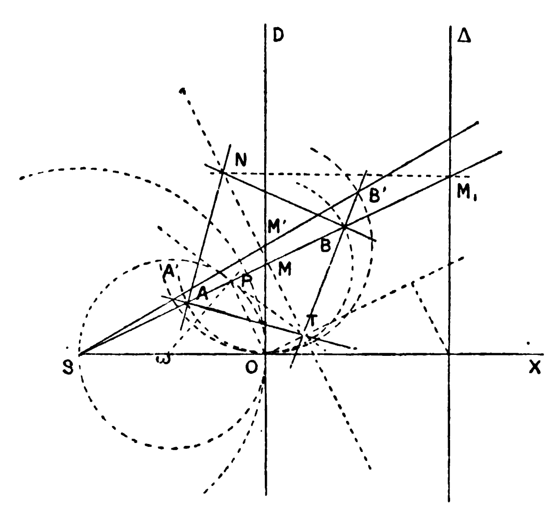
$$SA.SB = SO^2 = a^2.$$

On retrouve cette propriété, que la strophoïde se transforme en elle-même par rayons vecteurs réciproques; le point S étant le pôle d'inversion ; le cercle de centre S et de rayon SO étant le cercle d'inversion.

Considérons la droite SA'M'B' infiniment voisine de SAMB. On a

$$SA.SB = SA'.SB'.$$

Les quatre points A, B, A', B' sont sur un cercle qui, à la limite, est bi-tangent à la strophoïde et orthogonal au cercle



d'inversion. Des remarques qui vont suivre, il résultera ces deux théorèmes :

Théorème I. — *Le lieu du pôle de la sécante* SAB, *par rapport à ce cercle, lorsqu'elle pivote autour du point* S, *est la cissoïde qui a pour point de rebroussement le point* O *et pour asymptote la droite* Δ.

Théorème II. — *Le lieu du centre de ce cercle est la parabole qui admet* F *pour foyer et la droite* D *pour tangente au sommet.*

Du point O, abaissons les perpendiculaires OP, OP′ sur les droites SAB, SA′B′. Les quatre points S,A,P,B forment une division harmonique; de même les quatre points S,A′,P′,B′. Ces deux divisions ayant un point homologue commun, les droites AA′, BB′, PP′ concourent. Or, à la limite, PP′ est tangente, en P, au cercle de diamètre SOQ, AA′, BB′ sont tangentes à la strophoïde. D'ailleurs AA′, BB′, à la limite, se coupent sur la perpendiculaire élevée en M à SAB. On arrive à cette construction de la tangente en un point B de la strophoïde :

On projette le point double P *sur* SB, *on joint le point* P *au point* ω *au milieu de* SO, *puis on élève la perpendiculaire en* P *à* Pω *et la perpendiculaire en* M *à* SAB. *Ces deux droites se coupent en* T ; TB *est la tangente cherchée.*

Menons, par le point O, une parallèle à SAB, qui rencontre MT en T′. Traçons T′P. Les triangles SOP, MOT′ ont leurs côtés perpendiculaires; les droites homologues T′P, Pω sont rectangulaires; donc TP, T′P sont confondues; et l'on a la construction suivante, extrêmement simple, et qui s'effectue avec la règle et l'équerre, pour la tangente à la strophoïde en un point B.

On trace SB *qui rencontre la droite* D *en* M ; *on tire les droites* MT *et* OT : *l'une, perpendiculaire ; l'autre, parallèle à* SB ; TB *est la tangente cherchée.*

Le lieu du point T est la cissoïde ayant pour point de rebroussement le point O et pour asymptote la droite Δ. Il suffit, pour le voir, de projeter sur OT le point de rencontre de l'asymptote et de l'axe de la strophoïde, et de se reporter à la définition ordinaire de la cissoïde. Le théorème I est ainsi démontré. D'ailleurs, si l'on observe que la droite MT enveloppe la parabole ayant F pour foyer et D pour tangente au sommet on conclut que la podaire d'une parabole, par rapport à son sommet, est une cissoïde ayant pour point de rebroussement le sommet et pour asymptote la directrice.

Prolongeons la droite SB jusqu'au point M_1, où elle rencontre l'asymptote de la strophoïde ; et, par M_1, menons la parallèle à

l'axe de la strophoïde; elle coupe MT au point N. Tirons NA, NB. On a

$$MB^2 = \frac{MB}{\cos\theta} \cdot MB\cos\theta = NM.MT,$$

θ désignant l'angle de SB avec SX.

L'angle NBT est droit : par suite NB est la normale au point B. D'ailleurs, le point N est le centre du cercle qui touche la strophoïde aux points A, B; et aussi le point où la droite MT qui enveloppe une parabole touche son enveloppe. Le théorème II est ainsi démontré.

On peut, à ce propos, noter la construction suivante de la normale en un point B de la strophoïde.

On trace SB, *qui rencontre l'asymptote en* M_1. *La parallèle à l'axe, menée par* M_1, *rencontre la perpendiculaire au point* M *à* SB *en* N; NB *est la normale cherchée.*

DES COORDONNÉES TRIPOLAIRES

Par M. Aug. **Poulain**, à Angers.

(*Suite*, voir pp. 3 et 51.)

V. — *Relation constante entre* λ, μ, ν.

36. — On a

(71) $\Sigma a^2\lambda^4 - 2\Sigma bc\cos A.\mu^2\nu^2 - 2abc\Sigma a\cos A.\lambda^2 + a^2b^2c^2 = 0,$

que nous écrirons $\varphi(\lambda,\mu,\nu)+\psi(\lambda,\mu,\nu)=0$, en groupant ensemble les termes de même degré; et aussi la formule équivalente

(72) $\Sigma\lambda^2(\mu^2+\nu^2-a^2)^2-(\mu^2+\nu^2-a^2)(\nu^2+\lambda^2-b^2)(\lambda^2+\mu^2-c^2)$
$-4\lambda^2\mu^2\nu^2=0.$

En effet la surface α' du triangle barycentrique MBC est donnée par l'égalité

(73) $16\alpha'^2 = 4\mu^2\nu^2 - (\mu^2 + \nu^2 - a^2)^2.$

Si dans cette relation on substitue à α' sa valeur tirée de la formule de transformation (59), en remplaçant S par $2ah_a$, on trouve (71).

37. — Il eût semblé plus simple de remplacer α', β', γ' par leurs valeurs dans $\alpha' + \beta' + \gamma' = S$. Mais alors on ne trouve

que l'identité S = S. Cela montre aussi qu'on ne peut trouver l'équation tripolaire de la droite de l'infini en partant de $\alpha + \beta + \gamma = o$ (voir **43**). On trouverait S = o ; ce qui toutefois rappelle l'équation de cette droite en coordonnées rectilignes.

38. — La formule (72) développée donne (71). Elle est donc équivalente à celle-ci. On peut l'établir directement au moyen des trois angles en M, que nous appellerons A', B', C' (*). La somme de leurs suppléments étant π (pour M intérieur à ABC), on a

$$(74) \qquad \Sigma \cos^2 A' - \cos A' \cos B' \cos C' - 1 = o.$$

D'ailleurs, les triangles MCB,... donnent

$$(75) \qquad \cos A' = \frac{\mu^2 + \nu^2 - a^2}{2\mu\nu}, \ldots$$

n'y a plus qu'à remplacer les cosinus par leurs valeurs ıns(74).

39. — Dans la relation (72), on peut permuter λ et b, en même temps que μ et a. Car cela revient à regarder M comme un sommet du triangle de référence, et C comme le point variable.

40. — Toute relation générale, entre λ, μ, ν, dans laquelle a^2 sera le coefficient de λ^4, aura identiquement les mêmes termes que (71). Car si nous regardons ces relations comme devant donner λ, connaissant μ et ν, ces équations doivent avoir des coefficients égaux, et pour une infinité de valeurs de μ et ν.

41. Conséquences et applications. — 1° Il y a donc une fonction du quatrième degré, $\varphi(\lambda, \mu, \nu)$, qui peut se rabaisser au second degré et il n'y en a qu'une.

42. — 2° Dès lors, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation tripolaire, du quatrième degré, représente

(*) M. Lemoine, à qui on doit la relation (71) (J. E. 1883, p. 265), se sert des moitiés de ces angles, ce qui nous semble plus long. La formule (72) est indiquée dans le *Recueil des 230 formules trigonométriques* de M. Vuibert.

une droite ou un cercle, sont que l'ensemble des termes du quatrième degré forme le polynôme $\varphi(x)$, et qu'il n'y ait pas de termes de degré impair.

43. — 3° Le cercle de l'infini s'obtient en modifiant arbitrairement la constante de (71). Car la nouvelle équation étant incompatible avec (71), n'est vérifiée que par des valeurs infinies. D'ailleurs, on ne peut donner à ce lieu le nom de droite puisqu'on insinuerait par là qu'on peut le tirer de l'équation barycentrique des droites; ce qui n'est pas vrai.

44. — 4° Soit M' l'associé tripolaire de M, c'est-à-dire le point dont les coordonnées sont de la forme $K\lambda$, $K\mu$, $K\nu$ (*J. S.* 1887, p. 250). En substituant ces expressions dans (71), on rouve la valeur de K^2 :

$$(76) \qquad K^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2\lambda^4 - 2\Sigma bc \cos A . \mu^2\nu^2}.$$

Car l'équation est du second degré en K^2. L'une des racines étant 1, l'autre égale leur produit.

45. — 5° La relation (71) donne immédiatement la solution par le calcul (*) du problème suivant: *inscrire, à trois cercles concentriques en* M, *et de rayon* λ, μ, ν, *un triangle semblable à un triangle donné* ABC. On prend comme inconnue R qui est donnée par une équation bicarrée et on en déduit a, b, c. Si on voulait que le triangle fût équilatéral, l'inconnue serait simplement $a = b = c$.

46. — 6° Si l'on donne μ et ν, la formule (71) détermine λ par une équation bicarrée, de la forme

$$(77) \qquad a^2\lambda^4 + 2u\lambda^2 + v = 0,$$

dans laquelle :

$$(78) \qquad u = -a(b \cos C . \mu^2 + c \cos B . \nu^2 + abc \cos A),$$

$$(79) \qquad v = b^2\mu^4 + c^2\nu^4 - 2bc \cos A . \mu^2\nu^2 - 2abc(b \cos B . \mu^2 + c \cos C . \nu^2) + a^2b^2c^2.$$

(*) R est calculé par une méthode trop longue, dans le *J. E. 1879 p. 120*. Le problème est très simple géométriquement, si l'on se sert de la méthode des figures semblables. On construit un triangle semblable à ABC; et l'on obtient, par des arcs de cercle, un point dont les distances aux sommets A, B, C sont proportionnelles à λ, μ, ν.

47. — Il y a donc deux valeurs de λ^2. On pouvait le prévoir, car la figure montre qu'il y a alors deux points M, M' répondant à la question. Ils sont symétriques par rapport à BC. Les valeurs de λ^2 deviennent égales quand M et M' se réunissent sur BC, c'est-à-dire quand $\mu + \nu = a$.

48. — 7° L'équation (71) résout, en réalité, un problème plus général : *calculer la distance* λ *de deux points* A, M, *quand on peut les considérer comme les sommets de deux triangles connus, ayant une base commune* BC.

On peut faire une remarque analogue sur toute formule où entre λ. Ou encore, l'équation (77) donne, en coordonnées bipolaires, la distance λ de deux points, a étant la distance des pôles; μ, ν les coordonnées du premier point; b, c, celles du second. Nous verrons qu'on ne peut rendre rationnelle cette double valeur de λ^2 (50).

49. — 8° Soit 4D le discriminant de l'équation (77). Je dis qu'on a

$$(80) \qquad \pm\sqrt{D} = 8S\alpha',$$

en prenant, dans le premier membre, le signe du second, qui est toujours connu.

En effet, il suffit de développer D; mais, plus rapidement, l'équation (77) donne

$$(81) \qquad \lambda^2 = \frac{-u \pm \sqrt{D}}{a^2}.$$

Si de là on tire $\sqrt{D}$ et que l'on compare avec la formule fondamentale (71), on trouve (80).

50. — 9° On ne peut pas disposer de a, b, c de manière que D soit le carré d'un polynôme en μ^2 et ν^2, sauf le cas inutile où ABC se réduit à une droite. En effet, d'après (80), D est exprimable en fonction de α', aire de MBC; et dès lors est décomposable en quatre facteurs $\mu + \nu - a, \ldots$ qui ne peuvent devenir égaux deux à deux. D n'est donc carré parfait que pour $S = 0$.

Par là même, on ne peut faire en sorte que l'équation (77) donne des valeurs rationnelles pour λ^2, quand M reste quel-

conque, ni que cette relation se décompose en deux autres du second degré par rapport à λ, et rationnelles.

15. — 10° A ce propos, on peut se demander si les équations et formules établies pour les coordonnées tripolaires s'appliquent, en général, aux bipolaires, sans trop de complication. On pourrait construire, sur la distance BC des deux pôles, un triangle de référence auxiliaire ABC. Mais il faudrait, pour éliminer commodément la troisième coordonnée λ^2, qu'elle pût s'exprimer rationnellement en fonction des deux autres. Or nous venons de voir que c'est impossible.

(A suivre.)

SUR LES SURFACES

ADMETTANT LES PLANS DE SYMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE RÉGULIER ET DU CUBE

Par M. **Ernest Lebon,**
Professeur de mathématiques, au Lycée Charlemagne.

(*Suite,* voir p. 103.)

Forme générale.

16. — Supposons que les surfaces S_3 soient représentées par l'équation (4). Imaginons un cube AH *(fig. 1)*, de côté $2b$, dont le centre O est le point d'intersection des axes d'une surface S_3, dont les faces sont perpendiculaires à ces axes; et un tétraèdre régulier BDEG, directeur de la surface S_3. Les équations

$$o = \pm 2x^3 + 3bx^2 + a$$

donnent les intersections des diagonales du cube et de la surface; les trois racines de chacune de ces équations sont réelles lorsque

$$a(a + b^3) \leqslant o.$$

17. — *La surface* S_3 *du premier genre* est formée de quatre nappes infinies, dont chacune est située dans l'un des quatre

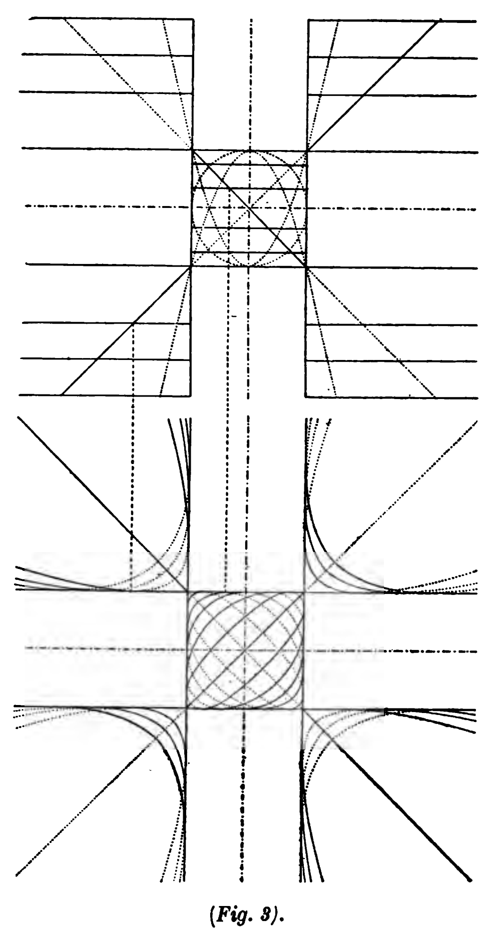
trièdres opposés par le sommet aux trièdres B, D, E, G du cube. Les faces du cube sont asymptotes aux nappes. Chaque diagonale du cube coupe la surface en un seul point réel. La surface n'a pas de sommets réels. Des plans parallèles aux faces du cube et coupant le cube ne rencontrent pas la surface. Toutes les sections réelles de la surface par des plans perpendiculaires à ses axes sont des hyperboles.

18. — *La surface* S_3 *du second genre* est formée d'une nappe fermée, intérieure au cube, et de quatre nappes infinies, dont chacune est située dans l'un des quatre trièdres opposés par le sommet aux quatre trièdres B, D, E, G du cube. Les faces du cube sont asymptotes aux nappes. Chaque diagonale du cube coupe la surface du cube en trois points réels. La surface a six sommets réels situés sur la nappe fermée. Des plans perpendiculaires aux axes de la surface coupent la nappe fermée selon des ellipses et les nappes infinies selon des hyperboles.

19. — *La surface* S_3 *du troisième genre (fig. 3)* (*) est formée d'une nappe fermée, intérieure au cube, et de quatre nappes infinies, dont chacune est située dans l'un des quatre trièdres opposés par le sommet aux quatre trièdres B, D, E, G du cube. Les quatre sommets du tétraèdre directeur, de côté $2\sqrt{2}\,b$, relient la nappe fermée aux quatre nappes infinies. *Les six arêtes du tétraèdre directeur sont six droites doubles de la surface* S^3 *du troisième genre.* Les faces du cube sont tangentes à lasurface le long des six arêtes du tétraèdre directeur, excepté aux sommets de ce dernier, qui sont *six points singuliers* où la surface admet une infinité de plans tangents. Chaque diagonale du cube directeur coupe la surface en deux points réels dont un, le sommet du tétraèdre, est double. Les six sommets de la surface sont les milieux des arêtes du tétraèdre. Des plans perpendiculaires aux axes de la surface coupent la nappe fermée selon des ellipses et les nappes infi-

(*) Les figures qui représentent les surfaces étudiées dans ce Mémoire sont la reproduction par la photographie des dessins que notre collègue M. Lesage a bien voulu exécuter.

nies selon des hyperboles. Nous nommerons *tetraédroïde* la surface S_3 du troisième genre.



(Fig. 3).

20. — Considérons d'abord la partie de *la surface* S_3 *du quatrième genre* située au dessus de sa section circulaire parallèle à la face ABCD du cube ; le diamètre 2ρ de ce cercle est supérieur au côté du cube. Entre la face ABCD et cette section, la surface est coupée, par des plans parallèles à la face ABCD, selon des ellipses dont le centre est sur l'axe OZ,

dont l'axe parallèle à EG diminue et dont l'axe parallèle à BC augmente indéfiniment, de sorte que l'ellipse limite, située dans la face ABCD, est formée de deux droites parallèles à BD. Entre la face ABCD et le sommet de la surface situé au-dessus de cette face, la surface est coupée, par des plans parallèles à la face ABCD, selon des hyperboles dont le centre est sur l'axe OZ, dont l'axe transverse parallèle à EG diminue indéfiniment, de sorte que l'hyperbole limite est formée de deux droites se coupant au sommet de la surface situé au-dessus de la face ABCD, à la hauteur ρ. Au-dessus de ce sommet, la surface est coupée par des plans parallèles à la face ABCD selon des hyperboles dont le centre est sur l'axe OZ, dont l'axe transverse est parallèle à BD et augmente indéfiniment. Au-dessous de la section circulaire parallèle à la face ABCD est une portion de surface orthosymétrique de la précédente. Chaque diagonale du cube coupe la surface en un seul point réel. Elle a six sommets réels. *La surface* S_3 *du quatrième genre admet un premier système de douze droites, deux à deux situées dans les faces du cube et parallèles aux arêtes du tétraèdre directeur.* Ces droites se coupent deux à deux sur les arêtes du cube. Elles déterminent trois à trois huit triangles équilatéraux égaux, qui n'ont pas de sommet commun et dont les plans sont respectivement parallèles aux faces du tétraèdre. *La surface* S_3 *du quatrième genre admet un second système de douze droites, deux à deux se coupant en ses six sommets, situés dans les faces d'un second cube, de côté* ρ, *homothétique et concentrique au premier cube de côté* $2b$. Ces droites se coupent deux à deux sur les arêtes du second cube. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Mangeot, professeur au Lycée de Troyes, la lettre suivante :

MONSIEUR,

Dans les tomes IV et V du *Journal de Liouville* (1839-1840), que l'on me communique, je lis une démonstration du théorème de d'Alembert, qui, par un point, ressemble à celle que

j'ai présentée dans le dernier numéro de votre Journal. Elle a été donnée par Mourey en 1828. Je crois devoir la signaler, bien qu'elle renferme certaines erreurs de raisonnement et qu'elle manque de rigueur.

Recevez, etc.

CONCOURS D'AGRÉGATION 1888

Solution par C. Clapier, étudiant à la faculté des sciences de Montpellier.

On donne un ellipsoïde S *et deux points* P *et* P'; *et l'on considère les ellipses* C *et* C', *suivant lesquelles l'ellipsoïde est coupé par les plans polaires des points* P *et* P'.

1° Démontrer que les coniques, C, C', *et les points* P, P', *sont situés sur une quadrique* Σ *qui est, en général, unique.*

2° Discuter cette quadrique, en supposant que le point P' *se déplace dans l'espace, le point* P *et l'ellipsoïde* S *restant fixes.*

3° Les points P *et* P' *étant supposés fixes et situés de façon que la quadrique* Σ *soit indéterminée, trouver le lieu du centre de cette quadrique.*

4° En supposant que les points P *et* P' *se déplacent de façon que la quadrique* Σ *soit une sphère, trouver la surface enveloppe* E *de cette sphère.*

5° Peut-on déterminer un point A *tel que la transformée par rayons recteurs réciproques, de la surface* E, *en prenant le point* A *pour pole, soit un cône du deuxième degré?*

1° Soient, α, β, γ ; α', β', γ', les coordonnées des points P, P';

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^3} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipsoïde. Nous poserons,

$$P = \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1, \qquad P' = \frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} + \frac{\gamma' z}{c^2} - 1,$$

$$Q = \frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} + \frac{\gamma\gamma'}{c^2} - 1,$$

$$A = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1, \qquad A' = \frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2} - 1.$$

L'équation générale des quadriques qui passent par les courbes C, C' est

$$S + \lambda PP' = 0.$$

Elles passent par les points P et P', lorsque ceux-ci sont situés sur l'ellipsoïde S; dans le cas général, une seule de ces quadriques satisfait à cette condition. On obtient son équation en faisant

$$\lambda = -\frac{1}{Q},$$

et l'on a

$$(\Sigma) \qquad QS - PP' = 0.$$

2° Le point P restant fixe, on connaîtra la nature de la section de l'ellipsoïde par son plan polaire. Lorsque le point P' se meut dans l'espace, il sera commode de discuter la surface Σ, par la méthode du diamètre.

Le diamètre du plan P a pour équations

$$(1) \qquad \frac{2Qx - P\alpha'}{\alpha} = \frac{2Qy - P\beta'}{\beta} = \frac{2Qz - P\gamma'}{\gamma};$$

il rencontre ce plan au point (x_0, y_0, z_0):

$$(2) \qquad \frac{x_0}{\alpha} = \frac{y_0}{\beta} = \frac{z_0}{\gamma} = \frac{1}{A + 1}.$$

Ensuite, il passe par le point (x_1, y_1, z_1), tel que,

$$\alpha Q x_1 = P_1\alpha', \quad 2Qy_1 = P_1\beta', \quad 2Qz_1 = P_1\gamma',$$

ou bien

$$(3) \qquad \frac{x_1}{\alpha'} = \frac{y_1}{\beta'} = \frac{z_1}{\gamma'} = \frac{1}{1 - Q}.$$

Les équations de ce diamètre peuvent être écrites ainsi:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} = \rho.$$

ρ étant proportionnel à la distance du point P_0 au point (x, y, z), cherchons à déterminer les valeurs de ρ correspondant aux points d'intersection avec la surface Σ.

Nous déduisons, de l'équation précédente,

$$x = \rho\frac{\alpha'}{1 - Q} + (1 - \rho)\frac{\alpha}{A + 1}, \ldots$$

Au moyen de ces égalités, S, P, P' deviennent, respectivement,

$$\rho^2\frac{A' + 1}{(1 - Q)^2} + 2\rho(1 - \rho)\frac{(1 + Q)}{(1 - Q)(A + 1)} + (1 - \rho)^2\frac{1}{A + 1} - 1,$$

$$\rho \frac{2Q}{1 - Q},$$

$$\rho \frac{A' + 1}{1 - Q} + (1 - \rho) \frac{Q + 1}{A + 1} - 1.$$

Finalement, l'équation en ρ, cherchée, est

(4) $\rho^2[(Q - 1)^2 - B] - 2\rho(Q - 1)(A + Q) - A(Q - 1)^2 = 0,$

dans laquelle

(5) $$B = (A + 1)(A' + 1).$$

Le discriminant de cette équation est

(6) $$(A + 1)(Q - 1)^2(Q^2 - AA').$$

Cela posé, nous aurons d'abord à distinguer trois cas, suivant que le point P est extérieur à l'ellipsoïde, intérieur à l'ellipsoïde, ou sur l'ellipsoïde. Prenons le premier cas, pour fixer les idées; l'expression A est positive, et on arrive facilement aux résultats suivants :

$(Q - 1)^2 - B > 0$	la surface Σ est un ellipsoïde réel,
$Q^2 - AA' < 0$	hyperboloïde à une nappe,
$(Q - 1)^2 - B < 0, Q^2 - AA' > 0$	hyperboloïde à deux nappes,
$Q^2 - AA' = 0$	cône réel,
$(Q - 1)^2 - B = 0$	paraboloïde elliptique,
$A = A', \; Q + A = 0$	cylindre elliptique.

Ainsi les équations

$$(Q - 1)^2 - B = 0, \qquad Q^2 - AA' = 0,$$

si l'on considère α', β', γ' comme des coordonnées courantes, représentent deux ellipsoïdes intérieurs l'un à l'autre, séparant l'espace en trois régions telles que, la nature de la surface Σ, parfaitement déterminée d'ailleurs, reste la même quand le point P' coïncide avec les différents points d'une même région.

Remarque. — Il est intéressant de chercher sous quelles conditions le centre de la surface Σ est indéterminé : on trouve les relations $A = A'$, $Q + A = 0$ qui correspondent au cylindre; nous avons ainsi une vérification des résultats précédents.

(A suivre.)

EXERCICES ÉCRITS

22. — On considère un cercle Δ et deux diamètres rectangulaires A'OA, B'OB. Par A', on mène une transversale mobile qui coupe Δ en C, et BB' en D.

Par les quatre points OACD, on fait passer une hyperbole équilatère H.

1° Trouver l'équation générale de ces hyperboles et montrer qu'elles sont circonscrites à un triangle équilatéral fixe.

2° Vérifier (*) que le lieu des centres de ces hyperboles est un cercle, concentrique à Δ, et de rayon moitié moindre.

3° Soit P un point commun à H et à Δ, autre que A et C. Ayant pris P' diamétralement opposé à P sur Δ, on trace P'C. Cette droite rencontre H en un point I. Le lieu de I est une droite passant par le centre de Δ.

4° La tangente δ, à H, au point C, coupe AD en un point J dont on demande le lieu géométrique.

5° Trouver l'enveloppe des droites δ. Cette enveloppe est une hypocycloïde à trois rebroussements, correspondant aux équations

$$\frac{x}{R} = \frac{R^4 + 6R^2t^2 - 3t^4}{(R^2 + t^2)^2}, \quad y = \frac{8R^4t}{(R^2 + t^2)^2}.$$

Notes sur l'exercice 21.

Soit

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

l'équation de la tangente mobile MA. Si l'on pose

$$MOx = \omega, \qquad OI = OA = \rho$$

on trouve d'abord

$$\operatorname{tg} \omega = 2m.$$

En éliminant x, y entre les équations :

$$y^2 - 2p'x = 0, \quad x^2 + y^2 - \rho^2 = 0, \quad y = mx + \frac{p}{2m}$$

on a

$$\left(\frac{p^2}{4m^2} + m^2\rho^2\right)^2 = (p - 2p' - 2p'm^2)\left\{\frac{p^2p'}{2m^2} + \rho^2(p - 2p')\right\}$$

(*) Lorsqu'une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle fixe, son centre appartient au cercle des neuf points de ce triangle.

Si l'on pose

$$h^2 = p'(p' - p),$$

le lieu cherché est représenté par l'équation

$$\rho^2 = \frac{4(p' + h)^2}{p'^2} \cdot \frac{(p' + h)^2 + p'^2 \mathrm{tg}^2\omega}{\mathrm{tg}^4\omega}.$$

Le paramètre h a deux valeurs, racines de l'équation (1).

Le lieu cherché est donc constitué par deux courbes du sixième degré. L'une d'elles, après avoir posé,

$$p' + h = a,$$

correspond à l'équation

$$p'^2 y^4(x^2 + y^2) = 4a^2x^2(a^2x^2 + p'^2y^2).$$

La courbe correspondante se construit sans difficulté.

Note. — Nous avons recu des solutions de l'exercice 21, de MM. Rezeau, conducteur des Ponts-et-Chaussées à la Roche-s/Yon. et Ravier, maître-auxiliaire au lycée Louis-le-Grand.

BIBLIOGRAPHIE

Les examens écrits et oraux pour l'admission aux écoles **Polytechnique et Centrale** seront publiés pendant les Concours de l'année 1889 aux conditions suivantes: Prix d'abonnement valables pendant toute la durée des examens à Paris, **École Polytechnique** (26e année) — examens du premier degré, admissibilité : 5 francs — examens du deuxième degré, admission : 5 francs. **École Centrale** (24e année) — examens de mathématique : 5 francs — examens de physique, de chimie et d'histoire naturelle : 5 francs.

Nota. — 1° Le service des abonnements sera fait très régulièrement;

2° Chacun des numéros relatifs aux épreuves orales de ces publications comprendra 4 pages grand in-8° et se vendra séparément au prix de 0 fr. 30. — S'adresser à la librairie Croville-Morant, 20, rue la Sorbonne.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Composition de Mathématiques.

Juin 1889.

1° Déterminer un polynôme entier en x, du septième degré, $f(x)$, sachant que $f(x) + 1$ est divisible par $(x - 1)^4$ et $f(x) - 1$ par $(x + 1)^4$. Quel est le nombre des racines réelles, de l'équation $f(x) = 0$?

2° On considère, dans un plan une parabole (P) et une ellipse (E) représentées respectivement par les deux équations

$$\text{(P)}\quad y^2 - 8x = 0, \qquad \text{(E)}\quad y^2 + 4x^2 - 4 = 0,$$

et un point M de coordonnées (α, β). On demande de trouver sur la parabole (P) un point Q tel que le pôle de la droite MQ, par rapport à l'ellipse (E), soit situé sur la tangente en Q à la parabole.

Trouver le nombre des solutions réelles du problème, suivant la position du point M dans le plan.

BOURSES DE LICENCE (PARIS)

Concours du 24 juin 1889.

1° Construire la courbe définie par l'équation (1) :

$$y = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x - 1)^2}. \tag{1}$$

2° Si l'on coupe cette courbe par une parallèle à l'axe des x et si on désigne par a l'abcisse de l'un des points d'intersection, les abcisses des cinq autres points d'intersection seront :

$$\frac{1}{a}, \quad 1 - a, \quad 1 - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1 - a}, \quad \frac{a}{a - 1}.$$

Distinguer, sur la figure, les points qui correspondent aux formules précédentes en supposant que a soit la plus grande des abcisses des points d'intersection.

3° La résolution de l'équation (1), où on regarde y comme un nombre donné et x comme l'inconnue, peut, de diverses manières, être ramenée à la résolution d'une équation du troisième degré, et d'une équation du deuxième degré.

4° Lieu de la projection du point d'intersection des tangentes à la courbe (1), en des points dont les abcisses sont inverses l'une de l'autre, sur la droite qui joint ces deux points.

QUESTIONS PROPOSÉES

327. — On considère deux coniques S, S′, situées sur une même surface du second ordre, un plan P et un cône passant constamment par la conique S′, son sommet décrivant la conique S. La trace de chacun de ces cônes, sur le plan P, est une conique r dont on demande l'enveloppe. *(Leinekugel.)*

328. — Etant données trois droites a, b, c parallèles à un même plan, on considère tous les triangles ABC dont les sommets sont situés sur ces droites et qui ont même centre de gravité G. Démontrer que les côtés de ces triangles sont les génératrices de trois paraboloïdes et que les plans ABC enveloppent un cône de second ordre. *(J. Neuberg.)*

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 14408 7-9.

SUR LES BRANCHES INFINIES DES COURBES ALGÉBRIQUES

Par M. **E. Catalan.**

(*Suite*, voir p. 145.)

209. — Arrivons au cas général, et supposons que β soit une racine multiple de $F_0(y) = 0$. Désignons par i le degré de multiplicité de cette racine, de façon que $y = \beta$ annule $F_0(y)$ et ses $i - 1$ premières dérivées. Il peut arriver que cette valeur de y annule quelques-unes des quantités $F_1(y)$, $F_2(y)$,... ainsi que leurs dérivées; mais elle ne les réduira pas toutes à zéro. Soit $F_p(y)$ la première fonction dont les $i - 1$ premières dérivées ne s'évanouissent pas, avec cette fonction même, par l'hypothèse de $y = \beta$. En remplaçant, dans l'équation (1), y par $\varepsilon \pm h$, nous aurons

$$(6)\quad \begin{aligned} &(\pm h)^i\left[\frac{F_0^{(i)}(\beta)}{1.2\ldots i} + \varepsilon_0\right]x^m + \varepsilon_1 x^{m-1} + \varepsilon_2 x^{m-1} + \ldots \\ &+ (\pm h)^k\left[\frac{F_p^{(k)}(\beta)}{1.2\ldots K} + \varepsilon_p\right]x^{m-p} + \ldots = 0; \end{aligned}$$

k étant inférieur à i, et ε_1, ε_2, ... ε_p, ... étant des quantités qui s'évanouissent avec h.

210. — En répétant tous les raisonnements précédents, on conclura qu'en *général*, on peut attribuer à h une valeur assez petite, pour que l'équation (6) ait une racine réelle, plus grande que tout nombre donné. Cette conclusion sera fautive dans un seul cas, celui où l'on aurait, à la fois :

i — k *pair*, p *pair*, $F_0^{(i)}(\beta)$ *et* $F_p^{(k)}(\beta)$ *de même signe* (*).

Si ces diverses conditions sont remplies, il arrivera que *les deux termes principaux*, de l'équation (6), seront constamment de même signe. Donc, quand on fera croître indéfiniment x et décroître indéfiniment h, à partir de certaines valeurs N

(*) Il y a encore à examiner le cas où le premier terme, non divisible par $(y - \beta)^i$, est $F_m(y)$ (Note de 1849).

et y, le premier membre ne changera pas de signe ; donc *on ne pourra pas faire acquérir, à cette équation, une racine plus grande que* N. Dans ce cas, il ne sera plus permis de dire que, pour $y = \beta$, l'équation (1) a une racine infinie.

211. — La théorie qui vient d'être exposée permet évidemment, de reconnaître si une courbe algébrique donnée a des branches infinies, dont la *direction soit parallèle* à l'axe des x.

En ordonnant l'équation de cette courbe par rapport aux de y, on déterminera, semblablement, les branches infinies, dirigées parallèlement à l'axe des y.

212. — Pour obtenir les branches infinies, *obliques aux deux axes,* faisons, dans l'équation de la courbe, $x = u \cos \omega$, $y = u \cos \omega$, de manière à passer des coordonnées rectilignes, supposées rectangulaires, à des coordonnées polaires. L'équation transformée sera

$$(7) \qquad A_0 u^m + A_1 u^{m-1} + \ldots + A_m = 0;$$

$A_0, A_1, \ldots$ représentant des *fonctions homogènes de sin* ω *et cos* ω, respectivement des degrés $m, m-1, \ldots$

Cela posé, on peut raisonner sur l'équation (7), absolument comme sur l'équation (1). C'est-à-dire qu'après avoir tiré, de l'équation $A_0 = 0$, une valeur réelle α de l'angle ω, on remplacera ω par $\alpha + h$, et l'on examinera si, pour des valeurs de h suffisamment petites, l'équation (7) peut acquérir une racine réelle, plus grande qu'un nombre donné. Si cela arrive, on pourra, en suivant la courbe, se transporter (*) à une distance de l'origine des coordonnées, plus grande que toute quantité assignable. Donc la courbe aura une branche infinie, pans la direction représentée par $\omega = \alpha$.

213. — La transformée (7) est peu propre aux applications, parce qu'elle exige que l'on forme les dérivées des fonctions $A_0, A_1, A_2, \ldots$ Mais il est bien facile de s'en passer. En effet, chacune des quantités $A_0, A_1, A_2, \ldots$ étant homogène en sin ω et cos ω; si l'on pose $\operatorname{tg} \omega = t$, ces quantités seront remplacées par des fonctions entières de la variable t, respec-

(*) Par la pensée (mai 1889).

tivement multipliées par $\cos^m \omega$, $\cos^{m-1} \omega$, ... On aura, au lieu de l'équation (7),

$$F_0(t) \cos^m \omega . u^m + F_1(t) \cos^{m-1} x . u^{m-1} + \ldots = 0;$$

ou plutôt :

$$(8) \qquad F_0(t)x^m + F_1(t)x^{m-1} + \ldots = 0;$$

équation que l'on déduit de la proposée, en remplaçant y par tx.

214. — On obtiendra donc la direction suivant laquelle la courbe peut avoir des branches infinies, en appliquant, à l'équation (8), les règles indiquées ci-dessus. Les branches parallèles à l'axe des y peuvent seules faire exception, parce qu'elles répondent à $t = \infty$. On comprend, en effet, qu'en général, à cause de $x = u \cos \omega$, l'abscisse x et le rayon vecteur doivent devenir infinis en même temps. Mais si,

$$\omega = \frac{\pi}{2},$$

ce qui répond à $t = \infty$, x peut être finie pour une valeur infinie de u (*).

215. — *Applications...*

DES COORDONNÉES TRIPOLAIRES

Par M. Aug. **Poulain**, à Angers.

(*Suite et fin*, voir p. 155.)

VI. — *Valeurs de λ, μ, ν, en fonction des coordonnées rectangulaires X, Y. — Classification des courbes.*

52. — Le premier problème est résolu, pour une origine quelconque O', par la formule (3) donnée ci-dessus

$$(3) \qquad \lambda^2 = (X - X_a)^2 + Y - Y_a)^2.$$

Le problème inverse est résolu par la formule

$$(82) \qquad 4SX = \Sigma(\lambda'^2 - \lambda^2)a_y,$$

qui comprend (59) comme cas particulier, et où l'on désigne

(*) La théorie qui vient d'être expliquée est tirée, en grande partie, du remarquable travail de M. Gorono, publié dans les tomes III et IV des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (Note de 1848).

par a_x, b_x,... les projections, prises avec leurs signes, des côtés BC,... sur l'axe des X. En effet, posant O'M = d, et les coordonnées de O' étant accentuées, la relation (3). développée, donne

$$(83) \qquad d^2 - 2X_aX - 2Y_aY = \lambda^2 - \lambda'^2.$$

μ et ν donnent deux équations analogues. On en tire X et Y, en observant que le dénominateur est un déterminant égal à 8S (*). En même temps, on trouve la troisième inconnue d^2, ce qui redonne la formule (18), sans que l'on fasse appel à aucun théorème spécial sur les tripolaires. Il suffit seulement d'observer que le mineur

$$(84) \begin{vmatrix} X_b & Y_b \\ X_c & Y_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X_b & Y_b \\ 1 & X_c & Y_c \end{vmatrix} = \text{surf. BO'C} = 2\alpha'.$$

53. Corollaires. — 1° Sans même calculer les inconnues X, Y, d^2, on voit qu'elles sont des fonctions du premier degré de λ^2,...

2° Donc, généralement, une équation cartésienne de degré m se transforme en une équation qui est également de degré m en λ^2,... Elle s'abaisse de p degrés, si les points cycliques sont des points multiples d'ordre p. Car alors d^2 est facteur, avec les puissances $p, p-1$,... dans les groupes de degrés $m, m-1$,...

3° Inversement, si l'on tire, de (83), la valeur de λ^2, on voit que toute courbe de degré m en λ^2,... comprend non seulement les courbes cartésiennes de degré m, mais des courbes de degré $m + p$ (avec $p \leqslant m$), qui ont nécessairement les points cycliques pour points multiples d'ordre p. Car les termes de degré $2m$ contiennent $(d^2)^m$ en facteur ; ceux de degré $2m-1$ contiennent $(d^2)^{m-1}$, etc. Ainsi l'équation du second degré en λ^2,... comprend les coniques, les cubiques circulaires et les quartiques bicirculaires (telles que les ovales de Descartes et de Cassini). L'équation du premier degré comprend les droites et les cercles (**2**). L'équation cartésienne ne descend jamais au degré m; car, autrement, en revenant à l'équation en λ^2..., on ne remonterait pas jusqu'au degré m, d'après le corollaire précédent.

(*) Pour fixer les signes, nous supposons que le parcours ABC se fait suivant une rotation directe.

SUR LES SURFACES

ADMETTANT LES PLANS DE SYMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE RÉGULIER ET DU CUBE

Par M. **Ernest Lebon**,
Professeur de mathématiques au lycée Charlemagne.

(*Suite*, voir p. 103.)

Sections planes.

21. — La section plane d'une surface S_3, représentée par l'équation (4), se projette, sur le plan ZOX, selon une cubique qui n'a pas d'asymptote parallèle à l'axe OZ, et qui a deux asymptotes quelconques.

22. — Un plan passant par un des quatre sommets du tétraèdre inscrit à un tétraédroïde coupe cette surface selon une cubique ayant un point double en ce point. On trouve que *le lieu des tangentes aux cubiques, sections d'un tétraédroïde par les plans qui passent par un quelconque des quatre sommets du tétraèdre inscrit, est un cône de révolution, ayant ce sommet du tétraèdre pour sommet, ayant la hauteur correspondante du tétraèdre pour axe, tangent, selon les trois arêtes du tétraèdre partant du sommet considéré, au cube qui a ces trois arêtes pour diagonales de trois faces adjacentes.*

23. — Si l'on imagine les deux cubes et le tétraèdre directeur définis précédemment (§ **16** et **20**), on peut dire que, sur une surface S_3 du quatrième genre, chacune des six faces du petit cube détermine deux droites parallèles à une arête du tétraèdre directeur; chacune des six faces du grand cube détermine deux droites qui se coupent en un sommet; huit plans perpendiculaires aux quatre diagonales de l'un des cubes déterminent huit triangles équilatéraux, égaux quatre à quatre; douze plans passant par deux sommets et parallèles aux arêtes du tétraèdre directeur déterminent douze triangles

isoscèles égaux; les douze droites du premier système se coupent en vingt-quatre points situés, quatre à quatre, dans les plans de symétrie; les douze droites du second système passent, deux à deux, par les six sommets et se coupent en vingt-quatre points situés, quatre à quatre, dans les plans de symétrie. Les droites des deux systèmes se coupent en quarante-huit points.

24. — Par chaque hauteur du trétraèdre directeur passent trois plans de symétrie faisant, deux à deux, des angles de 120°; donc un plan perpendiculaire à une hauteur du tétraèdre directeur est perpendiculaire à trois plans de symétrie, et, par suite, coupe la surface S_3 selon une courbe ayant trois axes de symétrie faisant, deux à deux, des angles de 120°. Pour étudier une section de ce genre, on cherche d'abord l'équation de la surface S_3, rapportée à trois axes rectangulaires ayant pour origine le centre O (*fig. 1*) du tétraèdre directeur, l'axe des z'' étant sa hauteur OA, l'axe des y'' étant la perpendiculaire en O au plan ZOX', l'axe des x'' étant dans le plan ZOX'. La nouvelle équation de la surface S_3 est

$$0 = a + b(x''^2 + y''^2 + z''^2) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\,z''^3 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,x''^3$$
$$- \sqrt{\frac{1}{3}}\,z''x''^2 + y''^2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x'' - \sqrt{\frac{1}{3}}\,z''\right).$$

Au moyen de cette équation, on reconnaît que *chaque hauteur du tétraèdre directeur est normale à la surface* S_3 *aux points où elle la rencontre.* (*A suivre*).

UN PROBLÈME SUR LE VÉLOCIPÈDE

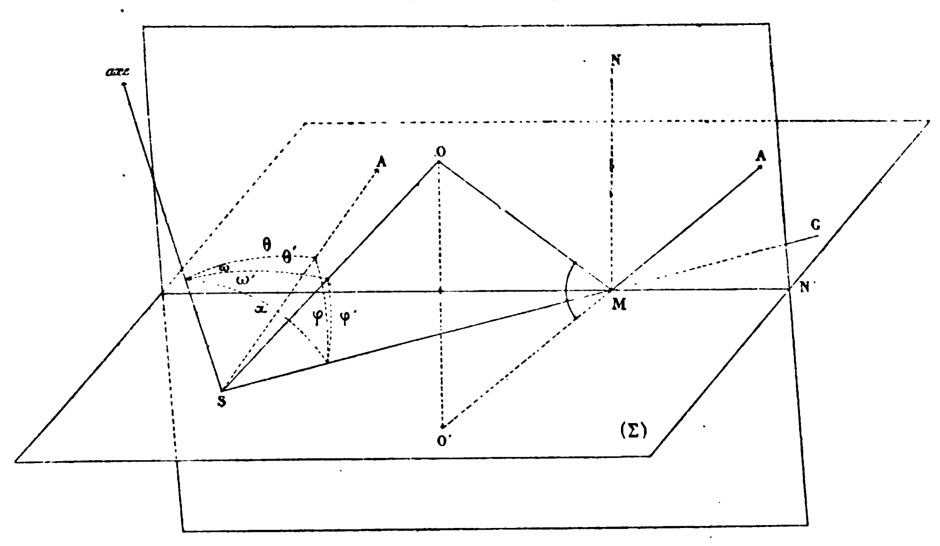
par M. **J.-B. Pomey**, ancien élève de l'École Polytechnique.

On demande la courbe des points lumineux qui se dessine, par un jour de soleil, sur une roue de vélocipède; c'est-à-dire le lieu des points brillants formés, sur une infinité de cylindres droits de rayon infiniment petit, qui ont pour axes les génératrices d'un

cône de sommet S *fixe. On donne la position de l'œil* O *de l'observateur et la direction des rayons du soleil* A. *Le point brillant n'est autre que l'image du soleil dans le miroir infiniment petit, formé par un élément de surface de ces cylindres.*

Soient M le point brillant situé sur la génératrice SG, Σ l'élément de surface dans lequel on voit le soleil, MN la normale à cet élément, O′ le point symétrique de O par rapport à Σ, MN′ la bissectrice de l'angle O′MO.

Les points O′, M, A sont en ligne droite, et l'angle N′MN des deux bissectrices de l'angle OMA est droit. Le plan d'incidence est le plan des droites MO, MA, MN, MN′. L'angle SMN qui est droit et qui a un de ses côtés situé, dans ce plan, se projette sur ce plan suivant un angle droit; donc MN′ est la projection de la génératrice SM; cette génératrice est donc située dans le plan mené par la bissectrice MN′



des deux droites MO, MO′, perpendiculairement à leur plan. Il en résulte l'égalité des angles O′MS, SMO. J'appelle : φ, cet angle, qui est celui de la génératrice avec le rayon lumineux; φ′, l'angle de la même génératrice avec la droite SO qui joint le sommet du cône au point de vue, θ l'an-

gle de l'axe du cône avec le rayon lumineux, θ' l'angle de ce même axe avec SO, ω l'azimut de la génératrice par rapport à celui du soleil, ω' l'azimut du point de vue O, l'axe du cône étant l'axe des plans méridiens, naturellement.

On a : $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\cos\omega$,
α étant la demi-angle au sommet du cône, et

$$\cos\varphi' = \cos\alpha\cos\theta' + \sin\alpha\sin\theta'\cos(\omega - \omega').$$

Posons $SM = \rho, \quad SO = d, \quad OM = R.$

Nous avons : $\rho = d\cos\varphi' + R\cos\varphi,$

$$R^2 = \rho^2 + d^2 - 2d\rho\cos\varphi'.$$

Par suite,

$$(1) \qquad \rho^2 - 2d\rho\cos\varphi' + d^2\frac{\cos^2\varphi' - \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = 0.$$

On aura ρ, en fonction de ω, en remplaçant, dans cette dernière équation, φ et φ' par leurs expressions en ω. On voit que, sur chaque génératrice, il y a deux points. Le milieu de ces deux points correspond à $\rho = d\cos\varphi'$; donc, il appartient à la sphère qui a pour diamètre SO. La courbe passera par le point de vue, tangentiellement aux génératrices suivant lesquelles le cône sera coupé par le plan bissecteur des droites SA (rayon lumineux) et SO (qui joint le sommet du cône au point de vue O); car on a alors $\varphi' = \varphi$.

On peut transformer l'équation (1) en coordonnées rectangulaires :

Je prends pour origine le sommet du cône,

Soient α, β, γ, les cosinus directeurs, du rayon lumineux, x, y, z, les coordonnées du point M, x_0, y_0, z_0 les coordonnées de l'œil de l'observateur. On a

$$\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\rho} = \frac{x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)}{R\rho}.$$

ou $[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2][\alpha x + \beta y + \gamma z]$

$$= [x^2 + y^2 + z^2 - (xx_0 + yy_0 + zz_0)]^2.$$

La courbe cherchée peut donc être considérée comme l'intersection du cône et d'une surface du quatrième degré. Si le cône dégénère en un plan la courbe devient une courbe plane du quatrième degré, dont l'équation est

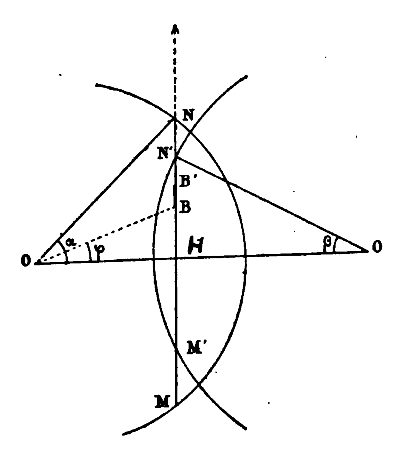
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2](\alpha x + \beta y) = (x^2 + y^2 - x_0x - y_0y)^2$$

VARIÉTÉS

QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE

(*Suite et fin*, voir p. 87.)

10. Le passage entre deux forts. — Imaginons que deux forts, à feux croisés, aient pour centres les points O, O′. Soit h la portée des pièces, et soient Δ, Δ' deux circonférences décrites, des points O, O′ comme centres, avec h pour rayon. Nous voulons chercher quelle est la ligne qu'il faut suivre pour passer entre les deux forts, en s'exposant le moins possible.



Nous admettrons, en principe, que la probabilité θ, que l'on soit atteint par les projectiles d'un fort, tant qu'on demeure soumis à l'action de son tir, est : 1° proportionnelle au temps et 2° en raison inverse de la distance.

Soit MN (*) le chemin suivi dans le champ de tir du fort O; prenons, sur MN, deux points voisins B, B′. Quand on va de B à B′, θ varie proportionnellement à BB′, mais en raison inverse de OB.

Pour le trajet MN, on a donc

$$\theta = \sum \frac{BB'}{OB},$$

BB′ étant infiniment petit.

(*) Cette trajectoire doit être perpendiculaire à la ligne des centres; c'est un fait qu'on peut considérer, croyons-nous, comme évident. Pour-

Posons

$$NOH = \alpha, \qquad BOH = \varphi, \qquad OO' = l.$$

Nous avons

$$BH = OH \operatorname{tg} \varphi,$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad BB' = d(BH) = OH \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

D'ailleurs,

$$(2) \qquad OB = \frac{OH}{\cos \varphi}.$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$\frac{BB'}{OB} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi};$$

et, par suite,

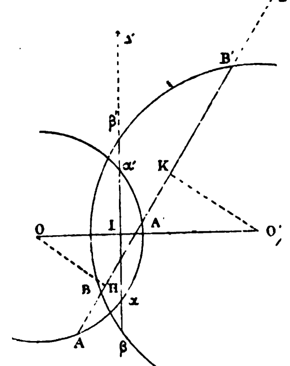
$$\theta = 2 \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = 2L \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Supposons maintenant que MN coupe le champ de tir du fort O′, aux points M′, N′. Si nous posons $N'O'H = \beta$, la quantité ζ, qu'il faut rendre minimum se calcule donc, d'après ce que nous venons de voir, par la formule :

$$(3) \qquad \zeta = 2L \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + 2L \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right).$$

---

tant, si l'on croit nécessaire de le démontrer, on pourra raisonner, ainsi qu'il suit.



Soit Δ une transversale oblique à la ligne des centres ; abaissons OH O′K perpendiculaires sur Δ ; prenons, sur OO′, OI=OH ; puis, par le point I, élevons Δ′ perpendiculaire à OO′.

Nous avons

$$OI + O'I > OH + O'K;$$

ou, puisque $OI = OH$,

$$O'I > O'K,$$

et, par suite,

$$BB' > \beta\beta'.$$

Comme $\alpha\alpha'$ est égal à AA′, et comme les deux droites sont à égale distance du centre O, la probabilité que nous étudions sera la même pour AA′ et pour $\alpha\alpha'$; mais comme BB′ est plus grand que $\beta\beta'$ et, plus rapproché de O′, il y a plus de chances d'être atteint en adoptant le chemin AA′BB′, comme nous l'avons avancé.

Dans cette égalité, α, β désignent deux paramètres variables, vérifiant la relation

(4) $$l = h(\cos\alpha + \cos\beta) \text{ (*)}.$$

D'après (3), le minimum de ζ correspond à celui de

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right).$$

En différentiant cette expression, on a

$$\frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\beta}{2}\right)}{\cos^2\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)}d\alpha + \frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(45 + \frac{\beta}{2}\right)}d\beta = 0,$$

ou

$$\cos\beta d\alpha + \cos\alpha\, d\beta = 0.$$

D'autre part, de (4), on déduit

$$\sin\alpha\, d\alpha + \sin\beta\, d\beta = 0.$$

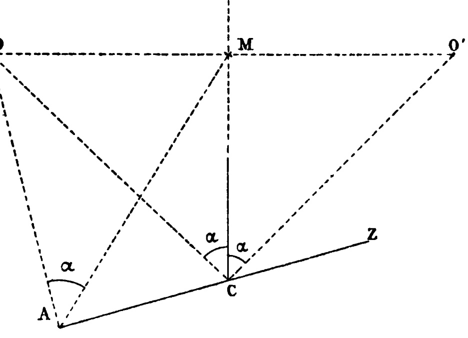
Ces deux dernières égalités donnent

$$\sin 2\beta = \sin 2\alpha,$$

ou, puisque α, β désignent ici des angles aigus,

$$\beta = \alpha.$$

Le passage doit donc être effectué en suivant la corde commune aux deux cercles de tir; résultat à peu près évident, *a priori*, mais qu'il n'était pas sans intérêt d'établir avec rigueur.



Quoi qu'il en soit, nous pouvons maintenant aborder la question suivante :

Deux forts (ou deux retranchements quelconques) O, O', étant considérés :

(*) Comme on le voit par cette égalité, nous supposons (et nous avons d'ailleurs fait, plus haut, cette hypothèse) que la portée des pièces est la même pour les deux forts. S'il n'en était pas ainsi, on aurait à résoudre par rapport à x, y, les équations

$$h\cos x + h'\cos y = d,$$
$$h\sin 2x = h'\sin 2y;$$

mais cette résolution n'est pas élémentaire.

1° chercher si leurs feux peuvent se croiser; 2° déterminer la ligne qu'il faut suivre pour passer à égale distance, des deux points O, O'.

Pour traiter la première question, on fixera des piquets aux points où s'est effectuée la chute de trois projectiles, lancés de O, dans des directions différentes; soient A, B, C les trois points ainsi observés. Ayant relevé les longueurs des côtés du triangle ABC, une formule élémentaire, celle qui donne le rayon du cercle circonscrit à un triangle, connaissant les trois côtés, permettra de calculer la portée h des pièces placées en O. On détermine ensuite la distance l des deux points inaccessibles O, O'; et l'on verra si l est plus petit ou plus grand que $2h$.

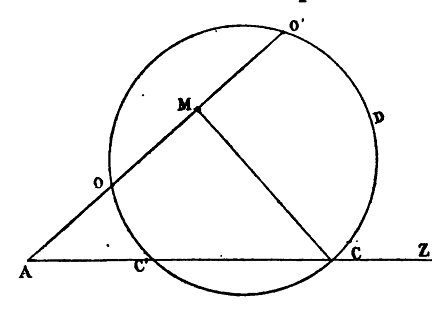
Il nous reste à montrer comment on répond à la seconde partie du problème qui nous occupe; nous indiquerons, pour sa solution, deux procédés:

1° Soit A la position de l'observateur, et soit AM la ligne de visée aboutissant au milieu de OO', ligne que nous avons appris à déterminer (*Seconde partie*, § 68).

Traçons AZ perpendiculaire sur AO; AZ rencontre, en C, la perpendiculaire élevée à OO', en son milieu M. Le quadrilatère OAMC est inscriptible; par suite, les angles OAM, OCM sont égaux. Ainsi

$$\widehat{OCO'} = 2\,\widehat{OAM}$$

On relèvera donc l'angle OAM $= \alpha$, et l'on donnera, aux branches de la fausse équerre, une position telle que l'angle qu'elles forment soit le double de l'angle observé OAM (*seconde partie*, §8). Cela fait, on s'avance sur AZ jusqu'à ce que l'on trouve un point C, tel que, de ce point, on aperçoive OO' sous l'angle 2α, marqué par les branches de la fausse équerre.

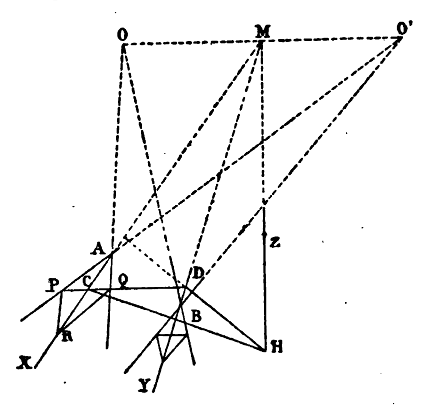


Mais ici se présente une difficulté. En effet, il existe, sur AZ, deux points C, C' d'où l'on voit OO' sous l'angle 2α; de ces

deux points, un seul convient; c'est le point C, bien déterminé, intersection de AZ avec MC.

Pour obtenir ce point C, on doit observer que les arcs OC'C, O'DC étant égaux, C'Z est la bissectrice de l'angle formé par C'O' et le prolongement de OC'; cette circonstance ne se présente plus en C. Ainsi, après avoir trouvé, sur AZ le point C d'où le segment OO' est vu sous l'angle 2α, on doit s'assurer que AZ n'est pas, en ce point C, bissectrice de l'angle extérieur du triangle OCO'.

Quand on a trouvé C, la ligne cherchée CM s'obtient en traçant la bissectrice de l'angle OCO'.



2° Soient A, B deux postes d'observation; AX, BY les lignes de visée aboutissant au milieu de OO', lignes obtenues, comme le montre la figure, conformément à la construction précédemment indiquée et déjà rappelée tout à l'heure. Traçons CD parallèlement à OO' (*) et déterminons, en H, l'orthocentre du triangle MCD. La droite cherchée est la perpendiculaire HZ abaissée, de H, sur la direction de CD.

CONCOURS D'AGRÉGATION 1888

Solution par C. Clapier, étudiant à la faculté des sciences de Montpellier.

(*Suite et fin*, voir p. 165.)

3° Nous avons vu que la surface Σ est indéterminée, et que son équation à la forme

$$S + \lambda PP' = o,$$

lorsque les points P et P' sont situés dans l'ellipsoïde S; ce

(*) On peut prendre, par exemple, comme le montre la figure, la dia-

qui revient à dire que ces surfaces Σ sont doublement tangentes à l'ellipsoïde S, en ces points P,P'.

Les équations du centre sont :

$$(7)\qquad \begin{aligned} 2x + \lambda(\alpha'P + \alpha P') &= 0,\\ 2y + \lambda(\beta'P + \beta P') &= 0,\\ 2z + \lambda(\gamma'P + \gamma P') &= 0. \end{aligned}$$

Les valeurs de x, y, z, déduites de ces relations, et portées dans P et P', donnent

$$[\lambda(Q + 1) + \lambda]P + \lambda P' + \lambda = 0$$
$$\ldots \lambda P + [\lambda(Q + 1) + 2]P' + 2 = 0;$$

d'où, en retranchant, $P = P'$; les équations (7) donnent alors, par l'élimination de λP, les équations du lieu demandé,

$$(8)\qquad \frac{x}{\alpha + \alpha'} = \frac{y}{\beta + \beta'} = \frac{z}{\gamma + \gamma'}.$$

Ce lieu est la droite qui joint le centre O au milieu de PP'. — On eût pu prévoir ce résultat géométriquement. Les deux surfaces S, Σ' se coupent suivant deux ellipses évanouissantes, qui passent aux points P, P'; de sorte que le plan diamétral de la corde PP' est le même pour les deux surfaces. Le centre de Σ est dans ce plan, qui passe par le point O et le milieu de PP'; il est aussi dans le plan OMM' comme le montrent *a priori* les équations (7) qui donnent,

$$\begin{vmatrix} x & \alpha' & \alpha \\ y & \beta' & \beta \\ z & \gamma' & \gamma \end{vmatrix} = 0;$$

donc le lieu des centres est l'intersection de ces deux plans.

4° Supposons que la surface Σ soit une sphère ; on doit avoir, en ne prenant que les termes du deuxième degré, dans l'équation de Σ,

$$(9)\qquad QS - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) \equiv PP'.$$

Ces plans P, P' devront être des plaus cycliques ; comme ils sont supposés réels, nous aurons d'abord

$$\lambda = \frac{Q}{b^2},\quad \beta = 0,\quad \beta' = 0.$$

---

gonale PQ du parallélogramme APQR. Dans cette construction, comme dans la précédente, il faut, avant tout, connaître la direction de OO' (Voir, pour les solutions diverses que comporte ce problème, le chapitre VI, de la *Géométrie de la Règle*, seconde partie).

D'après cela, l'identité (9) deviendra

$$Q\left[x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]=\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\gamma z}{c^2}\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{\gamma' z}{c^2}\right):$$

on en déduit :

$$Q=\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1 \quad =\frac{b^2}{b^2-a^2-c^2},$$

$$(10) \qquad \alpha\gamma'+\gamma\alpha'=0, \quad \frac{\alpha\alpha'}{a^2}=\frac{b^2+a^2}{a^2+c^2+b^2},$$

$$\frac{\gamma\gamma'}{c^2}=\frac{c^2-b^2}{a^2+c^2+b^2}.$$

Et, vu ces conditions, l'équation $QS - PP' = 0$, de la surface Σ, qui est une sphère, devient

$$(11) \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{b^2-m^2}-\frac{\alpha+\alpha'}{a^2}x-\frac{\gamma+\gamma'}{c^2}z-\frac{m^2}{b^2+m^2}=0$$

$$m^2=2b^2-a^2-c^2.$$

Les paramètres $\alpha, \alpha', \gamma\, \gamma'$ étant liés par les trois équations (10), il existe une infinité de telles surfaces. Pour avoir leur enveloppe, il faudra éliminer ces paramètres entre les équations (10), (11) et la suivante,

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{x}{a^2} & \frac{z}{c^2} & \frac{z}{c^2} \\ \gamma' & \gamma & \alpha' & \alpha \\ \alpha' & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma' & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

obtenue par différentiation. En développant et en supprimant le facteur $\alpha\gamma' - \gamma\alpha'$, qui ne peut être nul, on a

$$(12) \qquad \frac{x}{a^2}(\alpha-\alpha')+\frac{z}{c^2}(\gamma-\gamma')=0.$$

Pour faire cette élimination, ajoutons et retranchons (11) et (12); puis faisons disparaître α' et γ', en les déduisant des deux dernières équations (10); Nous trouvons ainsi,

$$x^2+y^2+z^2-2(a^2-b^2)\frac{x}{\alpha}-2(c^2-b^2)\frac{z}{\gamma}-m^2=0,$$

$$2\alpha\frac{x}{a^2}+2\gamma\frac{z}{c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2-m^2}{b^2-m^2}$$

$$c\sqrt{b^2-c^2}\,\alpha=a\sqrt{a^2-b^2}\,\gamma.$$

Les deux dernières donnent α et γ; en portant dans la première, le terme en xz disparaît, et nous obtenons, pour l'enveloppe cherchée, la cyclide représentée par,

$$(13)\ \text{E}\ \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - m^2)^2}{b^2 - m^2} - 4(a^2 - b^2)\frac{x^2}{a^2} + 4(b^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0.$$

5° Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ le pôle de la transformation par rayons vecteurs réciproques; transportons l'origine en ce point; l'équation E devient

$$\frac{\{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 + (z + z_0)^2 - m^2\}}{b^2 - m^2} - 4(a^2 - b^2)\frac{(x + x_0)^2}{a^2}$$
$$+ 4(b^4 - c^2)\frac{(z + z_0)^2}{c^2} = 0.$$

D'autre part (X, Y, Z) étant un point quelconque de la transformée, nous aurons les égalités

$$x = \frac{X}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad y = \frac{Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad z = \frac{Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Substituant dans la précédente, on trouve, en cherchant à annuler les coefficients de l'ordre le plus élevé et en prenant $x_0 = 0$, $z_0 = 0$:

$$\frac{\{X^2 + Z^2 + [Y + y_0(X^2 + y^2 + z^2)]^2 - m^2(X^2 + y^2 + z^2)^2\}^2}{(b^2 - m^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)^2}$$
$$- 4\frac{a^2 - b^2}{a^2}X^2 + 4\frac{b^2 - c^2}{c^2}Z^2 = 0$$

Cette équation se réduit et devient

$$(14)\quad \frac{(1 + 2y_0Y)^2}{b^2 - m^2} - 4\frac{a^2 - b^2}{a^2}X^2 + 4\frac{b^2 - c^2}{c^2}Z^2 = 0,$$

si l'on prend $y_0 = m^2$.

Donc, si $m^2 = 2b^2 - a^2 - c^2$ est une quantité positive, il existera deux points sur l'axe des y, $y_0 = \pm m$ tels que la transformée par rayons vecteurs réciproques, en prenant l'un d'eux pour pôle, soit un cône du deuxième degré (14).

BIBLIOGRAPHIE

A Treatise ou spherical trigonometry, etc... by John Casey. Dublin, 1889.

Cet ouvrage, comme le dit l'auteur dans sa préface, forme une suite naturelle à son *Traité de Trigonométrie plane*. Il est conçu dans le même ordre d'idées et, comme tous les ouvrages du savant professeur de l'Université de Dublin, il constitue un modèle d'ordre, de clarté, de précision et d'érudition. Un pareil livre mérite qu'on l'analyse avec quelque attention ; mais voici d'abord, rapidement tracé, le plan de ce Traité.

Il est divisé en neuf chapitres (*) et chacun d'eux est partagé en sections; celles-ci sont suivies de nombreux exercices, fort bien choisis, très intéressants, et, pour la plupart, originaux. Quelques-uns, seulement, sont empruntés aux ouvrages classiques, du même genre, ou à diverses publications mathématiques. Mais, dans ce cas, par un scrupule qu'on ne saurait trop approuver, les sources auxquelles ces exercices sont empruntés sont toujours indiquées par l'auteur. On voit par ces quelques mots, et par la citation que nous avons faite des titres des différents chapitres, quelle est la physionomie générale de l'ouvrage. En abordant l'analyse de cet ouvrage qui, par l'abondance et l'originalité des sujets qu'il met en lumière, laisse bien loin derrière lui tous ceux qui l'ont précédé, nous signalerons d'abord certains points qui nous paraissent soulever quelques observations intéressantes.

La démonstration de la formule fondamentale

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

est présentée, comme dans la *Trigonométrie* de Serret, en construisant l'angle plan du dièdre A. Cette démonstration exige, comme l'on sait, une certaine discussion. Après avoir établi la formule, en supposant

$$b < \frac{\pi}{2}, \quad c < \frac{\pi}{2},$$

on doit, en effet, montrer qu'elle subsiste quand on a

$$b \geqslant \frac{\pi}{2}, \quad c \geqslant \frac{\pi}{2}.$$

La démonstration des ouvrages classiques français (**), adoptée dans

---

(*) Nous indiquerons ici pour donner une idée générale du livre les titres de ses différents chapitres.

Chapitre I. *La Géométrie sphérique.*
— II. *Formules relatives aux côtés et aux angles d'un triangle sphérique.*
— III. *Résolution des triangles sphériques.*
— IV. *Applications diverses.*
— V. *L'excès sphérique.*
— VI. *Petits cercles de la sphère.*
— VII. *La théorie de l'inversion* (et les projections stéréographiques).
— VIII. *Les Polyèdres.*
— IX. *Applications de la Trigonométrie sphérique.*

(**) Voyez, *Briot* et *Bouquet*, p. 119 ; *Vacquant* et *Macé de Lepinay*, p. 363.

l'enseignement moderne, nous paraît préférable. Le théorème des projections, sur lequel elle s'appuie, lui donne en effet, immédiatement, le caractère de généralité qu'on est au contraire obligé de reconnaitre par un raisonnement direct, dans l'autre manière de faire.

La règle mnémonique de Napier, au moyen de laquelle on peut obtenir les formules relatives aux triangles sphériques rectangles, est critiquée, après beaucoup d'autres auteurs, par M. Casey. Je ferai connaître ici le moyen préconisé par M. Casey, bien que le procédé imaginé par Napier offre, si je ne me trompe, moins de chances d'erreur.

La règle de M. Casey consiste à rapprocher les formules de la trigonométrie plane et de la trigonométrie sphérique, comme le montre le tableau suivant.

TRIANGLE PLAN	TRIANGLE SPHÉRIQUE
$\sin B = \frac{b}{c}$	$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$
$\cos B = \frac{b}{c}$	$\cos B = \frac{\tang b}{\tang c}$
$\tang B = \frac{b}{c}$	$\tang B = \frac{\tang b}{\sin c}$
$\sin B = \cos C$	$\sin B = \frac{\cos C}{\cos c}$

(A *sommet de l'angle droit*).

La permutation des lettres B, C; b, c fait connaître les autres formules.

M. Casey affirme avoir, par expérience, tiré les meilleurs résultats du tableau précédent (*). Pourtant on n'imagine pas bien, nous semble-t-il, comment, devant une défaillance de mémoire, on passera du premier tableau au second avec la certitude d'effectuer cette transcription sans erreur. Ce qui rend particulièrement pratique le pentagone de Napier, c'est qu'il fait connaître, immédiatement, sans intermédiaire, la formule dont on a besoin, formule dans laquelle entrent les deux éléments donnés et un des éléments inconnus. Cet avantage existe-t-il dans le procédé mnémonique indiqué par M. Casey? Si nous l'avons bien compris, il nous semble qu'il exige, au contraire, que toutes les formules soient écrites; cela fait, on choisit, parmi elles, celles qu'on doit employer

Pendant que je suis en train d'indiquer les points, en petit nombre, et de minime importance, au sujet desquels je suis en divergence d'opinion avec M. Casey, je signalerai encore la démonstration proposée (p. 131) pour établir la formule donnant le volume du parallélipipède oblique.

M. Casey prend pour base de cette démonstration le théorème connu, correspondant à l'énoncé suivant :

Dans un triangle sphérique le produit du sinus d'un côté, par le sinus de la hauteur (**) correspondante, est le même pour les trois côtés du triangle.

(*) On fait ici abstraction des formules

$$\cos a = \cos b \cos c, \qquad \cos a = \cotg B \cotg C.$$

On peut d'ailleurs admettre que, en vertu de leur forme simple et symétrique, elles peuvent être imposées à la mémoire sans avoir recours à une règle mnémonique.

(**) Il faut, bien entendu, dans cet énoncé, entendre que la hauteur

Ce produit est égal à 2 n (*) ; *si l'on pose*

$$4n^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c..$$

Cette proposition, si la lecture très scrupuleuse que j'ai faite de l'ouvrage, plein d'intérêt, que j'analyse ici, ne m'a pas trompé, n'est pas démontrée dans le texte principal. On la trouve simplement énoncée, à titre d'exercice (p. 26, ex. 9). Or, si elle découle immédiatement de la formule que donne le volume d'un parallélipipède, elle exige, au contraire, du moins avec le calcul que nous avons fait, un certain effort pour être établie directement. Nous trompons-nous, en pensant que, en adoptant une pareille marche, les rôles sont intervertis ; que les choses relativement compliquées précèdent les démonstrations plus simples ; et, finalement, que, pour aboutir au but, on dépense, en suivant cette façon de faire, une somme de travail plus considérable que si l'on recherchait directement (soit comme nous l'avons indiqué (*), soit par tout autre procédé élémentaire, indépendant des considérations de la Trigonométrie sphérique) l'expression du volume du parallélipipède oblique ? Il nous semble que le problème posé est essentiellement du domaine de la Trigonométrie élémentaire ; et que, par suite, sa solution ne doit pas exiger des considérations étrangères à cette science. Enfin, il nous paraît y avoir avantage à considérer cette formule comme fondamentale, en l'utilisant pour la recherche des propriétés, en nombre considérable, qui en découlent par voie naturelle.

Quoiqu'il en soit, que les observations précédentes soient justifiées, ou non, elles ne touchent qu'à de simples détails et on les jugera, avec raison, peu importantes. Si je les signale, c'est qu'elles portent sur des points intéressant plus particulièrement les candidats à l'École Polytechnique. Peut-être, contrairement à mon avis, et malgré les raisons que j'ai données pour l'appuyer, trouveront-ils préférables les procédés de M. Casey. J'ai tenu, dans tous les cas, à les leur faire connaître, pour qu'ils puissent les juger et, au besoin, les adopter, s'ils les trouvent bons. G. L.

(A suivre.)

---

désigne l'arc de grand cercle abaissé, d'un sommet, perpendiculairement à la base correspondante.

(*) Cette fonction *n* des cosinus des côtés du triangle ABC, qui se rencontre dans des questions si diverses de la Trigonométrie sphérique et de la Géométrie analytique à trois dimensions, a été nommée par STAUDT le *sinus du trièdre* O.ABC. D'après une note de M. Casey (p. 22), M. Neuberg a proposé deux noms, pour la fonction *n* : 1° *Premier Staudtien* du triangle ; 2° *Premier norm.*

Il nomme *Second Staudtien* ou *second norm*, la fonction

$$N = \sqrt{\sin \varepsilon \sin (A - \varepsilon) \sin (B - \varepsilon) \sin (C - \varepsilon)},$$

On sait que le mot *norm* a été employé par M. Sylvester pour désigner une fonction se rattachant au tétraèdre.

(*) *Géométrie analytique*, t. II.

EXERCICES ÉCRITS

23. — On considère un quadrilatère ABCD tel, que le triangle, qui a pour sommets les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales, est rectangle et isoscèle. Le point A est intérieur à ce triangle rectangle, et ses distances aux deux côtés de l'angle droit sont désignées par a et b.

1° Trouver, parmi toutes les coniques C qui ont le triangle précédent pour triangle polaire, celles pour lesquelles il existe des points P tels, que l'hyperbole équilatère, qui passe aux pieds des quatre normales menées de l'un des points P à la conique C, soit circonscrite au quadrilatère.

2° Il y a en général trois points P, deux à distance finie, un à l'infini : trouver les coordonnées de ces points et les équations des coniques C qui y correspondent.

3° Dans quels cas y a-t-il une infinité de points P? On trouve, pour lieu de ces points P, une droite D et une hyperbole équilatère H. Trouver le lieu des centres des coniques C qui correspondent à des points P décrivant l'hyperbole H, ensuite le lieu des sommets des coniques C qui correspondent à des points P décrivant la droite D.

4° Lieu des extrémités des diamètres conjugués égaux des coniques C qui correspondent à des points P décrivant la droite D.

Construire ce lieu.

(PAGÈS, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Montpellier.)

Notes sur l'exercice 22.

1° L'équation générale des hyperboles H considérées est

$$x^2 - y^2 + 2\frac{\mu}{R}xy - Rx + \mu y = 0,$$

μ désignant un paramètre variable. Chacune de ces hyperboles passe par A et coupe Δ (abstraction faite des points A, C) en deux points P, Q appartenant à la droite dont l'équation est $x = -\frac{R}{2}$. Ainsi, toutes ces hyperboles sont circonscrites à un triangle équilatéral fixe.

2° Le lieu des centres est la circonférence des neuf points du triangle

APQ ; elle a pour équation

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}.$$

3° Le lieu de I est une droite correspondant à l'équation

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Elle passe par l'origine O, et elle est inclinée sur Ox d'un angle égal à 30°.

4° Le lieu de J est le folium double ordinaire; l'origine étant au point diamétralement opposé à A, et AA′ étant la direction positive de l'axe polaire on a, pour le représenter en coordonnées polaires, l'équation

$$\rho = 4R \sin^2\omega \cos\omega,$$

etc...

Nota. — Nous avons reçu une solution de M. Rezeau.

QUESTION 177

Solution par M. Laisant.

De combien de manières peut-on ranger 2n *nombres inégaux deux à deux, sur deux lignes, de telle sorte que les nombres croissent dans chaque ligne de gauche à droite, et dans chaque colonne de haut en bas?* (Ed. Lucas.)

Il est à peu près évident que la première colonne ne peut avoir que l'une des n formes

$$\begin{matrix} 1 \\ n+1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ n-1 \end{matrix} \quad \cdots \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Soient $v_{n,1},\ v_{n,2},\ v_{n,3}\ \ldots\ v_{n,n}$

les nombres des dispositions commençant par ces premières colonnes, et u_n le nombre cherché. On aura

$$u_n = v_{n,1} + v_{n,2} + \ldots + v_{n,n}.$$

Prenons un quelconque $v_{n,k}$ de ces termes ($k < n$). Il représente le nombre des dispositions commençant par $\begin{matrix} 1 \\ n-k+2 \end{matrix}$ comme première colonne.

Si, dans l'une quelconque de ces dispositions, nous supprimons la première colonne, on voit qu'il restera $2(n-1)$ nombres disposés sur deux lignes, et que la première colonne

restante aura l'une des formes

$$\begin{matrix}2\\ n+2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}2\\ n+1\end{matrix} \qquad \ldots \qquad \begin{matrix}2\\ n-k+3\end{matrix}$$

aucun nombre inférieur à $n - k + 2$ ne pouvant figurer dans la ligne inférieure.

D'après les notations précédentes, les nombres de dispositions qui correspondent à ces diverses formes sont, comme on le reconnaît sans peine,

$$v_{n-1,1}, \quad v_{n-1,2}, \quad \ldots \quad v_{n-1,k}.$$

Il suffit, pour cela, d'oberver qu'on peut diminuer d'une unité tous les nombres inférieurs à $n - k + 2$, et de deux unités tous les nombres supérieurs, les valeurs absolues n'important en rien.

Donc, nous aurons

$$v_{n,k} = v_{n-1,1} + v_{n-1,2} + \ldots + v_{n-1,k}.$$

A cette relation, qui s'applique jusqu'à $k = n - 1$, il convient d'ajouter cette remarque évidente, que $v_{n,n}$, c'est-à-dire le nombre des dispositions commençant par la colonne $\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$, est égal à $v_{n,n-1}$, nombre des dispositions commençant par la colonne $\begin{matrix}1\\3\end{matrix}$. Enfin, $v_{n,1}$ est toujours égal à l'unité.

D'après cela, nous aurons la solution cherchée en formant le tableau suivant

(A)

(a)

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65
		5	14	28	48	75	110...			
			14	42	90	165	275...			
				42	132	297	572...			
					132	429	1001..			
						429	1430..			
							1430..			

dans lequel un nombre quelconque est obtenu en faisant la somme de celui qui est situé au-dessus avec celui qui est

placé à sa gauche, sauf pour les derniers nombres de chaque colonne, identiques à ceux respectivement placés au-dessus d'eux.

Les nombres u_n sont les sommes de chaque colonne de ce tableau, ou ce qui revient au même, les derniers nombres des colonnes suivantes; en sorte que tous les nombres cherchés sont ceux qui se trouvent sur la diagonale (a).

Pour obtenir une formule donnant ces solutions, il est naturel de former le tableau analogue, mais complet et symétrique,

(B)

(b)			(b')								
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715		
1	6	21	56	126	252	462	792	1287			
1	7	28	84	210	462	924	1716				
1	8	36	120	330	792	1716	3342				

dans lequel on reconnaît le triangle arithmétique de Pascal écrit sous une forme particulière, et où l'on voit que les diagonales perpendiculaires à (b) donnent les coefficients du développement des puissances d'un binôme.

Nous comparerons maintenant ces deux tableaux en en formant un troisième, au moyen des différences terme à terme :

(C)

(c)	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		1	1	1	1	1	1	1	1
			5	6	7	8	9	10	11
				21	28	36	45	55	66
					84	120	165	220	286
						330	495	715	1001
							1287		

La diagonale (c) de ce tableau est identique (et on le démontrerait rigoureusement sans difficulté) à la diagonale (b') du tableau (B).

Il résulte de là que chaque terme u_n est égal au coefficient

du terme milieu du développement de $(a + b)^{2(n-1)}$, moins le coefficient du terme qui le précède de deux rangs; en sorte qu'on a

$$u_n = C_{n-1}^{2(n-1)} - C_{n-3}^{2(n-1)} = \frac{1}{n+1} C_n^{2n}.$$

Par conséquent, on peut dire encore qu'on obtiendra les solutions demandées en divisant chaque nombre de la diagonale (b) par le nombre de la même colonne appartenant à la seconde ligne.

La simplicité de la formule ainsi obtenue permet de croire qu'on arriverait à la démontrer directement, ou du moins d'une façon moins détournée. Les tentatives que j'ai faites à ce sujet ont été vaines, et c'est ce qui me décide à publier la solution précédente, heureux si elle peut servir d'indication utile à ceux qui seraient désireux de reprendre cette intéressante question d'Analyse combinatoire.

NOTA. — Autre solution par M. J. Chapron, qui considère le problème comme un cas particulier du suivant :

Placer les p *premiers nombres sur deux lignes, de sorte que les nombres soient croissants en chaque ligne de gauche à droite et en chaque colonne de haut en bas, de toutes les façons possibles et en supposant que les éléments placés sur la deuxième ligne soient en nombre* q *au plus égal au nombre de ceux de la première, et que ces éléments se trouvent placés dans les* q *premières cases au dessous des* q *premiers nombres de la première ligne.*

M. Chapron trouve, pour calculer le nombre inconnu X_q^p, la formule

$$X_q^p = \frac{p(p-1)\dots(p-q+3)}{(q-1)!}(p-2q+3).$$

Cette formule donne la solution du problème posé, en faisant $p = 2n$ $q = n + 1$.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15820-7-9.

SUR LES SURFACES

ADMETTANT LES PLANS DE SYMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE RÉGULIER ET DU CUBE

Par M. **Ernest Lebon**,
Professeur de mathématiques au Lycée Charlemagne.

(*Suite*, voir p. 173.)

III. — Surfaces hexaédriques.

Propriétés générales.

25. — Nous désignerons par S_4 les surfaces hexaédriques. L'équation (5) représente ces surfaces quand elles sont rapportées à trois axes rectangulaires, dont chacun passe par les centres de deux faces opposées d'un cube directeur. Elle montre que, quand $c = d$, la surface S_4 se réduit à l'ensemble de deux sphères concentriques, dont les rayons sont les racines positives de l'équation

(12) $$0 = c\rho^4 + 2b\rho^2 + a.$$

L'origine est un *centre* de toute surface S_4.

Nous appellerons *plans de symétrie, de première espèce*, des surfaces S_4 les trois plans perpendiculaires aux arêtes du cube directeur en leurs milieux; *plans de symétrie, de seconde espèce*, les six plans déterminés chacun par deux des quatre diagonales du cube directeur.

Les droites qui passent par les centres de deux faces opposées du cube directeur sont trois *axes de symétrie, de première espèce*, de toute surface S_4. Ils coupent la surface en douze points qui sont des *sommets de première espèce*; ces points sont les intersections des trois axes de première espèce et de deux sphères concentriques à la surface, ayant pour rayons les racines positives de l'équation (12).

Deux cubes C et C_1 ont leurs faces tangentes à la surface, en leurs centres, aux sommets de première espèce.

26. — En rapportant les surfaces S_4 à trois axes rectangulaires, dont l'un est OZ *(fig. 1)*, dont les deux autres sont les bissectrices OX' et OY' des angles des axes OX et OY, on trouve que leur équation est

$$0 = 2a + 4b(x'^2 + y'^2 + z^2) + (c + d)(x'^4 + y'^4)$$
$$+ 2cz^4 + 4d(x'^2 + y'^2)z^2 + 2(3c - d)\, x'^2y'^2.$$

Cette équation montre que les six droites qui joignent les milieux des côtés du cube, en passant par son centre, sont six axes de symétrie de toute surface S_4 : nous dirons que ce sont des *axes de seconde espèce*. Ils coupent la surface en vingt-quatre points qui sont des *sommets de seconde espèce;* ces points sont les intersections des six axes de seconde espèce et de deux sphères concentriques à la surface, ayant pour rayons les racines positives de l'équation

$$0 = (c + d)\rho^4 + 4b\rho^2 + 2a.$$

Les deux cubes C et C_1 ont leurs arêtes tangentes à la surface, en leurs milieux, aux sommets de seconde espèce.

Les sections de toute surface S_4 par les plans de symétrie d'une espèce, ou par des plans parallèles à ceux-ci et équidistant du centre, sont égales.

27. — En rapportant les surfaces S_4 à trois axes rectangulaires, dont l'un OZ'' *(fig. 4)* est la demi-diagonale OB du cube, l'autre OX'' passe par le milieu d'un côté, le troisième OY'' passe par un sommet de l'hexagone régulier section du cube directeur par le plan perpendiculaire en O, à OB; on trouve que l'équation des surfaces S_4 est

$$(13) \qquad 0 = a + 2b(x''^2 + y''^2 + z''^2)$$
$$+ \frac{1}{2}(c + d)(x''^2 + y''^2)^2 + \frac{1}{3}(c + 2d)z''^4 + 2c(x''^2 + y''^2)z''^2$$
$$+ \frac{2}{3}\sqrt{2}(c - d)z''x''^3 - 2\sqrt{2}(c - d)x''y''^2z''.$$

D'après cette équation, *toute surface* S_4 *admet huit sections circulaires concentriques à la surface, deux à deux perpendiculaires aux quatre diagonales du cube directeur, quatre à quatre égales.*

Tout plan, perpendiculaire à une diagonale du cube direc-

teur, coupe la surface S_4 selon une courbe ayant pour axes de symétrie les intersections du plan sécant et des trois plans de symétrie passant par cette diagonale, c'est-à-dire trois axes qui sont les trois diamètres d'un hexagone régulier. Quand

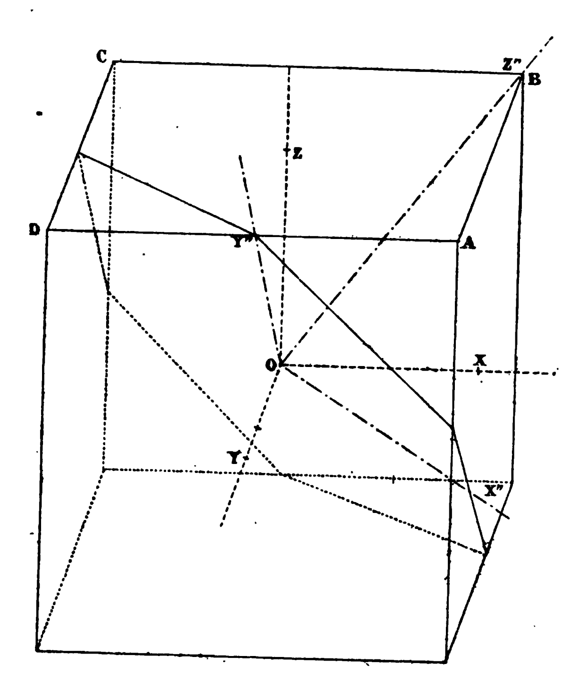


Fig. 4.

la surface est représentée par l'équation (13), l'axe OX″ est l'un de ses axes de symétrie ; les équations des deux autres sont :

$$y'' = \pm \sqrt{3}x''.$$

Les intersections des quatre diagonales du cube directeur et d'une surface S_4 sont les intersections de ces diagonales et de deux sphères concentriques à la surface, dont les rayons sont les racines positives de l'équation

$$0 = (c + 2d)\rho^4 + 6b\rho^2 + 3a.$$

Cône asymptote concentrique.

28. — Soient

(14) $$x = mz, \qquad y = nz,$$

les équations d'une droite passant par l'origine. L'ordonnée z d'un point d'intersection de la droite et d'une surface S_4 est donnée par l'équation

(15) $$o = a + 2b(m^2 + n^2 + 1)z^2 + [c(m^4 + n^4 + 1) + 2d(m^2n^2 + m^2 + n^2)]z^4.$$

La droite est asymptote à la surface pour tous les couples de valeurs de m et de n qui annulent le coefficient de z^4. Par suite, l'équation

(16) $$o = c(x^4 + y^4 + z^4) + 2d(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)$$

est celle d'un *cône asymptote concentrique* à une surface S_4. Ce cône admet les neuf plans de symétrie et les neuf axes du cube directeur.

L'intersection d'une surface S_4 et de son cône asymptote concentrique est située sur la sphère représentée par

(17) $$o = a + 2b(x^2 + y^2 + z^2).$$

29. — *Lorsque* c *et* d *sont de même signe, ou lorsque* d *est nul, le cône asymptote concentrique est imaginaire. Lorsque* c *est nul, le cône asymptote concentrique se réduit aux trois axes de première espèce.*

Lorsque c et d sont de signes contraires, on peut supposer que c est positif. On trouve les résultats suivants :

Quand c *est positif, le cône asymptote concentrique :*

1° *est imaginaire si* $d > o$, *ou si* $o < -d < \frac{c}{2}$;

2° *se réduit aux quatre diagonales du cube directeur si* $-d = \frac{c}{2}$;

3° *est dit de* **première espèce,** *si* $\frac{c}{2} < -d < c$;

4° *se décompose en quatre plans, perpendiculaires aux quatre diagonales du cube directeur, en son centre, si* $-d = c$;

5° *est dit de* **seconde espèce** *si* $-d > c$.

30. — Le *cône asymptote concentrique, de première espèce*, est formé de quatre cônes compagnons égaux, de même sommet, entourant les quatre diagonales du cube directeur, ayant chacun, pour plans de symétrie, les trois plans déterminés par la diagonale du cube intérieure au cône et, respectivement, par les trois axes de première espèce.

Le *cône asymptote concentrique, de seconde espèce*, est formée de trois cônes compagnons égaux, de même sommet, ayant chacun, pour plans de symétrie, les trois plans des coordonnées, et, pour axe de symétrie, l'un des trois axes de première espèce.

(A suivre.)

CONCOURS GÉNÉRAL

DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES EN 1889

Solution, par M. Rézeau, conducteur des Ponts et Chaussées, à la Roche-sur-Yon.

Étant donnés un cercle ayant pour centre le point O *et une parabole* P, *on considére toutes les coniques inscrites au quadrilatère formé par les tangentes communes au cercle* O *et à la parabole* P.

Cela posé, on demande de trouver :

1° (a) *L'enveloppe des polaires* A, *du point* O, *par rapport aux coniques* C; (b) *l'enveloppe des tangentes* T *aux coniques* C, *telles que les normales au point de contact passent par le point* O; (c) *l'enveloppe des axes des coniques* C.

2° Les lieux géométriques des pieds des perpendiculaires abaissées, du point O, *sur les polaires* A, *sur les tangentes* T *et sur les axes des coniques* C.

1° *(a)* Prenons, comme axes, deux droites rectangulaires, menées par le centre du cercle O, l'un d'eux Ox, étant parallèle à l'axe de la parabole P.

Soient R le rayon du cercle; (a, b) les coordonnées du sommet de la parabole P, dont le demi-paramètre est p.

Les équations de O et de P sont :

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

et $$(y - b)^2 - 2p(x - a) = 0;$$
ou $$y^2 - 2px - 2by + 2ap + b^2 = 0;$$
et, en coordonnées tangentielles homogènes :

(O) $$R^2(u^2 + v^2) - w^2 = 0,$$
(P) $$2au^2 + 2buv - pv^2 + 2uw = 0.$$

L'équation générale des coniques C sera
$$\varphi = 2au^2 + 2buv - pv^2 + 2uw + \lambda[R^2(u^2 + v^2) - w^2] = 0.$$

L'équation de l'origine étant $w = 0$, les coordonnées de la polaire de ce point sont déterminées par
$$\varphi'_u = (2a + \lambda R^2)u + bv + w = 0,$$
$$\varphi'_v = bu + (\lambda R^2 - p)v = 0.$$

En éliminant λ, on a l'équation tangentielle de l'enveloppe :

(A) $$v\varphi_u - u\varphi'_v = 0,$$
ou $$b(u^2 - v^2) - (2a + p)uv - vw = 0.$$

Tout d'abord, on voit que le lieu est une parabole P′ dont la directrice passe par l'origine.

En coordonnées cartésiennes, son équation est :
$$[x - (2a + p)]^2 - 4by + b^2 = 0,$$
ou $$[x - (2a + p)]^2 + (y - 2b)^2 = y^2.$$

Les coordonnées du foyer sont donc $x = 2a + p$, $y = 2b$. La directrice est l'axe Ox; elle est perpendiculaire à la directrice de la parabole P. Son paramètre est égal à $2b$.

REMARQUE. — L'équation de P′ est indépendante de R; donc, l'enveloppe reste la même lorsque le rayon du cercle O varie.

Le paramètre de P′ étant $2b$, on voit ainsi que si le rayon du cercle O varie ainsi que la parabole P dans le plan de la figure, mais de façon à conserver toujours le même axe ($y = b$), l'enveloppe des polaires considérées, par rapport à toutes les coniques C, sont des paraboles égales, de paramètre $2b$.

(b) Soit $u_0x + v_0y + w_0 = 0$, l'équation d'une tangente à la conique C. L'équation du point de contact est :
$$u\varphi'_{u_0} + v\varphi'_{v_0} + w\varphi'_{w_0} = 0.$$

Celle de l'origine est $w = 0$.

La droite joignant ces deux points sera donc représentée par
$$x\varphi'_{v_0} - y\varphi'_{u_0} = 0.$$

Elle sera perpendiculaire à la tangente, si l'on a :
$$-\frac{u_0}{v_0}\frac{\varphi'_{v_0}}{\varphi'_{u_0}} + 1 = 0;$$

c'est-à-dire

(1) $$bu_0^2 - (2a + p)u_0v_0 - bv^{\ 2} - v_0w_0 = 0.$$

L'on a ainsi

(2) $$2au_0^2 + 2bu_0v_0 - pv_0 + 2u_0v_0 + \lambda[R^2(u_0^2 + v_0^2) - w_0^2] = 0.$$

L'équation tangentielle de l'enveloppe s'obtiendra donc en éliminant λ entre les deux équations précédentes, où l'on fera ensuite u_0, v_0, w_0 coordonnées courantes. L'équation (1) étant indépendante de λ, représente le lieu. C'est la parabole (A) trouvée plus haut.

Remarque. — L'équation (2) devient indépendante de λ lorsque $R^2(u^2 + v^2) - w^2 = 0$. La conique C se réduit alors au cercle O, qui est l'enveloppe cherchée. Ce résultat était évident *a priori*.

Soient u_0, v_0, w_0 les coordonnées d'un des axes.

Il passe par le centre q ; on a donc

(3) $$\varphi'_{w_0} = 0 \qquad \text{ou} \qquad u_0 - \lambda w_0 = 0.$$

L'équation $u_0x + v_0y + w_0 = 0$ représentera un axe si la droite joignant son pôle au centre de C lui est perpendiculaire. Cette droite a pour équation :

$$x\varphi'_{v_0} - y\varphi'_{u_0} = 0.$$

En exprimant la condition de perpendicularité, on a

$$-\frac{u_0}{v_0}\,\frac{\varphi'_{v_0}}{\varphi'_{u_0}} + 1 = 0.$$

Les égalités (3), (4) donnent par élimination de λ l'équation de l'enveloppe. Or, (4) est indépendante de λ; le lieu n'est autre que celui qu'on a trouvé dans les deux premiers cas.

Remarque. — L'équation (3) devient indépendante de λ lorsque $w_0 = 0$. L'axe passe alors par l'origine. La conique C est le cercle O et, dans ce cas, l'enveloppe des axes se réduit à l'origine $w = 0$. Résultat évident *a priori*.

Les diagonales du quadrilatère formé par les tangentes communes peuvent être considérées comme des coniques C (ellipses ou hyperboles infiniment aplaties), la parabole P′ doit être inscrite au triangle formé par les trois diagonales de ce quadrilatère.

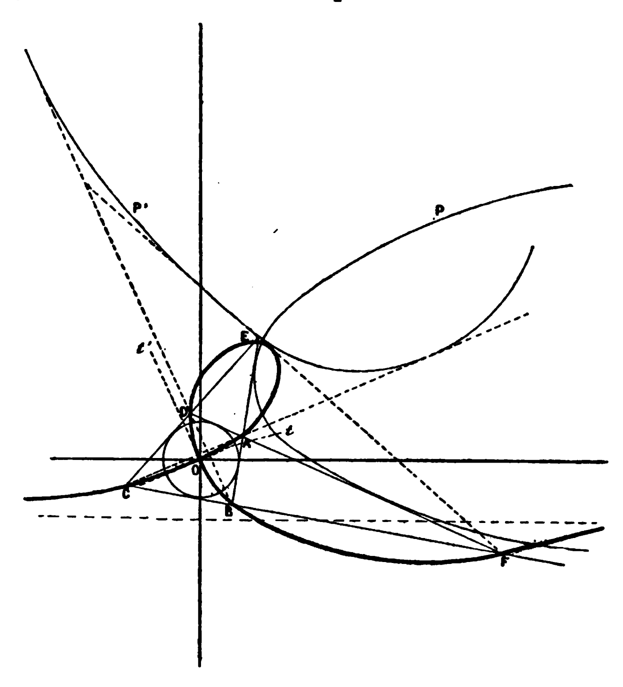
Remarque. — Si l'on observe que le lieu des centres des coniques C est le lieu des points d'où l'on peut mener à la parabole P′, deux tangentes rectangulaires, on voit que le lieu des centres des coniques C est la directrice de P′, c'est-à-dire l'axe OX.

D'autre part, on sait que le lieu des centres des coniques inscrites à

un quadrilatère est la droite qui joint les milieux des trois diagonales du quadrilatère (Th. de Newton). L'axe Ox passe donc par les milieux des trois diagonales du quadrilatère formé par les tangentes communes.

Cette propriété est encore vérifiée quand on fait varier les éléments de la figure, comme on l'a fait dans la première remarque.

2° Le lieu de ces points sera la polaire de l'origine, par rapport à la parabole P'. Or, l'origine est un point de la directrice de P', donc le lieu sera une strophoïde.



L'équation de cette courbe s'obtiendra en éliminant u, v, w entre les équations :

$$bu^2 - (2a + p)uv - bv^2 - vw = 0,$$
$$ux + vy + w = 0,$$
$$vx - uy = 0.$$

On trouve facilement

$$y(x^2 + y^2) + bx^2 - (2a + p)xy - by^2 = 0,$$

La courbe correspondante est une strophoïde dont le nœud est à l'origine.

Son asymptote réelle a pour équation $y = - b$. La strophoïde passe par le point (o, b); car son équation peut s'écrire :

$$(A) \qquad 2[xy + bx - (2a + p)y] + y^2(y - b) = o.$$

Cette courbe passe également par les sommets du quadrilatère des tangentes communes; car on peut vérifier que l'équation (A) représente le lieu de ces sommets, lorsque le rayon du cercle varie.

En résumé la courbe est disposée, relativement à la figure donnée, comme l'indique la figure ci-dessus.

REMARQUE. — On peut encore observer que cette strophoïde est le lieu des points de contact des tangentes T aux coniques C, que nous avons considérées plus haut.

BIBLIOGRAPHIE

A Treatise on spherical trigonometry, etc... by John CASEY. Dublin, 1889. *(Suite.)*

Pour montrer, au moins par un exemple, la richesse du livre de M. Casey, je reproduirai ici l'élégante démonstration qu'il donne du *théorème de Frobenius* (*).

On sait comment M. Darboux (**) a défini *la puissance mutuelle de deux cercles tracés sur une sphère.*

Soient C_p, C_q ces deux cercles; *le produit des cosinus de leurs rayons sphériques, diminué du cosinus de l'arc qui joint leurs centres sphériques représente leur puissance mutuelle.*

On le représente symboliquement par pq.

Cela posé, le théorème de Frobenius s'énonce ainsi : *Soient* $C_1, C_2, \ldots C_5$; $C_{1'}, C_{2'}, \ldots C_{5'}$, *deux systèmes de cinq cercles quelconques, tracés sur une même sphère; on a*

$$\begin{vmatrix} 11' & 12' & 13' & 14' & 15' \\ 21' & 22' & 23' & 24' & 25' \\ 31' & 32' & 33' & 34' & 35' \\ 41' & 42' & 43' & 44' & 45' \\ 51' & 52' & 53' & 54' & 55' \end{vmatrix} = o.$$

Prenons trois axes rectangulaires quelconques, passant par le centre de la sphère considérée. Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre sphérique et r_1 le rayon sphérique du cercle C_1 ; et ainsi des autres. Si

(*) D'après une note de M. Casey, ce théorème est la base d'un mémoire de G. Frobenius, publié dans le *Journal de Crelle*, de 1875, et intitulé *Anwendungen der Deminantentheorie auf die Geometrie des Maasses* ».

(**) *Annales de l'École normale supérieure*, 2e série, t. I, 1872.

nous multiplions les déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & y_1 & z_1 & \cos r_1 \\ 0 & x_2 & y_2 & z_2 & \cos r_2 \\ 0 & x_3 & y_3 & z_3 & \cos r_3 \\ 0 & x_4 & y_4 & z_4 & \cos r_4 \\ 0 & x_5 & y_5 & z_5 & \cos r_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & x_{1'} & y_{1'} & z_{1'} & -\cos r_{1'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & x_{5'} & y_{5'} & z_{5'} & -\cos r_{5'} \end{vmatrix}$$

le premier élément du produit est

$$x_1x_{1'} + y_1y_{1'} + z_1z_{1'} - \cos r_1 \cos r_{1'}.$$

En supposant le rayon de la sphère égal à l'unité, on sait que

$$x_1x_{1'} + y_1y_{1'} + z_1z_{1'} = \cos C_1OC_{1'}.$$

On a donc

$$x_1x_{1'} + y_1y_{1'} + z_1z_{1'} - \cos r_1 \cos r_{1'} = \cos C_1OC_{1'} - \cos r_1 \cos r_{1'} = -11$$

etc... Le produit considéré étant manifestement nul, le théorème énoncé se trouve démontré.

Malgré tout ce que nous avons dit du livre que nous analysons ici, nous n'aurions donné, de ce traité, qu'une idée très incomplète, si nous n'insistions sur ce qui nous paraît constituer le trait saillant, la nouveauté principale de cet ouvrage remarquable.

M. Casey a eu l'idée, excellente, d'introduire dans la Géométrie du triangle sphérique les principes si féconds sur lesquels repose l'étude moderne de la Géométrie du triangle rectiligne. En France, aucun ouvrage classique (*) n'a encore osé dire un mot de cette science nouvelle qui, même limitée à ses parties les plus essentielles, fournit une mine inépuisable de théorèmes et d'exercices. Peut-être, les éditeurs français, pour publier un ouvrage comme celui de M. Casey, attendent-ils que ces vérités soient devenues classiques; pendant que les professeurs et les élèves, de leur côté, réclament le livre qui les leur fera connaître. Ce cercle vicieux n'est pas connu à l'étranger. Là, on commence par publier le livre qui est destiné à propager les idées nouvelles. Il donne l'élan; et il est si vite et si bien adopté que les éditions se suivent sans interruption, pour le plus grand bien de la science, et... pour le plus grand profit des éditeurs.

Pour montrer l'extension des théorèmes récents de la Géométrie du triangle rectiligne, à la Géométrie sphérique, on me permettra de prendre l'exemple des points et des transversales réciproques (**). Les deux théorèmes que nous allons énoncer sont proposés à titres d'exercices (pp. 72 et 73; ex. 6 et 12); nous donnerons ici, pour chacun d'eux, la démonstration simple qu'ils nous paraissent comporter.

Théorème I. — *Soit* P *un point pris sur la surface d'une sphère à laquelle appartient un triangle sphérique* ABC. *L'arc* CP *rencontre* AB *en* C'. *Soit* C'' *l'isotomique* (***) *de* C'; *l'arc* CC'' *et les arcs analogues* AA'', BB'', *concourent au même point* P', *réciproque de* P.

(*) La trigonométrie de M. Lalbalétrier, publiée depuis que cet article est écrit, fait pourtant exception à cette observation.

(**) M. Casey les appelle *points et droites isotomiques*, en adoptant la dénomination autrefois proposée par M. Neuberg. Je reprends ici les termes que j'ai employés dans le mémoire original et qui sont ordinairement usités.

(***) Nous rappelons que deux points C', C'' sont isotomiques, sur une ligne AB, lorsque le milieu de C'C'' coïncide avec le milieu de AB.

Considérons un angle yox; soit AB un arc ayant pour centre le point O. Si nous prenons sur AB, deux points C′, C″, isotomiques, les coordonnées de C′ étant α, β; celles de C″ sont β, α.

D'après cette remarque, les plans zOC′, xOA′, yOB′; ZOC″, XOA″, YOB″ sont représentés respectivement par les équations

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x, \qquad z = \frac{\gamma'}{\beta'} y, \qquad x = \frac{\alpha''}{\gamma''} z;$$

$$y = \frac{\alpha}{\beta} x, \qquad z = \frac{\beta'}{\gamma'} y, \qquad x = \frac{\gamma''}{\alpha''} z.$$

Si les trois premiers, comme nous le supposons, concourent suivant une droite, on a

$$\beta\gamma'\alpha'' = \alpha\beta'\gamma''.$$

Or, cette relation prouve que les trois autres plans concourent suivant une droite; le théorème énoncé se trouve ainsi établi.

Théorème II. — *Si trois points* A′, B′, C′, *appartenant à un arc de grand cercle, sont situés sur les côtés d'un triangle sphérique* ABC; *leurs isotomiques appartiennent à un second arc de grand cercle, réciproque du premier*

En effet, si les points A′, B′, C′ dont les coordonnées sont représentées respectivement par

$$\alpha, \beta, 0; \qquad 0, \beta', \gamma'; \qquad \alpha'', 0, \gamma''$$

sont situés dans un plan passant par l'origine, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & 0 & \gamma'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\alpha\beta'\gamma'' - \beta\gamma'\alpha'' = 0.$$

Or cette condition exprime que les points isotomiques A″, B″, C″, dont les coordonnées sont :

$$\beta, \alpha, 0; \qquad 0, \gamma' \ \beta'; \qquad \gamma'' \ 0 \ \alpha'';$$

sont situés dans un plan passant par l'origine Ainsi, les points A″, B″, C″ appartiennent à un certain arc de grand cercle. G. L.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CONCOURS DE 1889 (*)

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites concourantes OA, OB, et un point P situé dans leur plan.

1° Construire, sur la droite OA, un point M tel que les deux cercles S et S′ passant par les points P et M et tangents à la droite OB se coupent sous un angle donné ω.

(*) Nous publierons, dans le prochain numéro les sujets relatifs aux compositions de Mécanique et d'Analyse.

2° Étudier la variation de l'angle sous lequel se coupent les deux cercles S et S', quand le point M se déplace sur la droite OA.

3° Soient Q et Q' les deux autres points d'intersection des cercles S et S' avec la droite OA; démontrer que le cercle circonscrit au triangle PQQ' est tangent à une droite qui reste fixe quand le point M décrit la droite OA.

Mathématiques spéciales.

On donne un cône du second degré C et deux quadriques A, A' inscrites à ce cône; on considère une quadrique variable S inscrite au même cône, en touchant les quadriques données A et A', en des points variables α et α'.

1° Démontrer que la droite $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe.

2° Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents à la surface S, aux points α et α'.

3° Démontrer que le lieu du pôle d'un plan fixe P par rapport à la surface S, se compose de deux quadriques bitangentes.

4° Trouver le lieu de la droite qui passe par les points de contact de ces deux quadriques, lorsque le plan P se déplace, en restant parallèle à un plan tangent au cône C.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS DE 1889

Composition de Mathématiques.

Étant donnés dans un plan deux axes rectangulaires ox *et* oy *et deux séries de paraboles; les unes* P, *de paramètre* p, *tangentes à* oy, *du côté des* x *positifs, et ayant leur axe parallèle à* ox; *les autres* Q, *de paramètre* q, *tangentes à* ox, *du côté des* y *positifs, dont l'axe est parallèle à* oy; *on demande* :

1° Le lieu du centre d'un conique C *qui se déplace sans changer de grandeur en passant constamment par les points communs à l'une des paraboles* P *et à l'une des paraboles* Q.

2° De démontrer que si l'on associe une parabole P *et une parabole* Q *de manière que la droite qui joint leurs foyers respectifs reste constamment parallèle à une direction donnée, la somme des angles que font les tangentes communes à ces deux paraboles avec un axe fixe,* ox *par exemple, demeure constante, et de trouver dans ces conditions le lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles.*

3° De placer une parabole P *et une parabole* Q *de façon qu'elles aient trois points communs confondus en un seul et de calculer, pour cette position des deux courbes, les coordonnées de leurs points communs et le coefficient angulaire de leur tangente commune en ce point.*

4° De démontrer que tout triangle circonscrit à la fois à l'une quelconque des paraboles P *et à l'une quelconque des paraboles* Q *est inscrit dans une conique fixe, et de trouver l'équation de cette conique.*

Considérons deux paraboles P, Q appartenant aux réseaux indiqués.

1° Soient : α, l'abcisse du sommet de Q ; β, l'ordonnée du sommet de P. Les équations de ces paraboles sont, respectivement,

(P) $$(y - \beta)^2 - 2px = 0,$$
(Q) $$(x - \alpha)^2 - 2qy = 0.$$

La conique (C) est représentée par l'équation

$$(x - \alpha)^2 + \lambda(y - \beta)^2 - 2qy - 2p\lambda x = 0,$$

qu'on peut écrire ainsi

$$(x - \alpha - p\lambda)^2 + \lambda\left(y - \beta - \frac{q}{\lambda}\right)^2 = 2p\lambda\alpha + 2q\beta + p^2\lambda^2 + \frac{q^2}{\lambda}.$$

Cette équation montre que (C) est toujours *une conique à centre*, résultat évident *a priori* (*). En transportant les axes au centre de (C), et en identifiant le résultat obtenu avec

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1,$$

on a

(1) $$A = \lambda B = 2p\lambda\alpha + 2q\beta + p^2\lambda^2 + \frac{q^2}{\lambda}.$$

D'ailleurs, les coordonnées du centre vérifient les égalités :

(2) $$x = \alpha + p\lambda, \qquad y = \beta + \frac{q}{\lambda}.$$

Les équations (1) prouvent que λ est une constante. En éliminant α, β entre (1) et (2), on a, pour représenter le lieu

(*) Par quatre points, on ne peut faire passer que deux paraboles (P), (Q).

des centres des coniques (C),

$$2p\lambda x + 2qy = A + p^2\lambda^2 + \frac{q^2}{\lambda}.$$

Ainsi *le lieu des centres des coniques* (C) *est une droite.*

2° L'équation générale des tangentes Δ, à (P), est

$$y - \beta = \theta x + \frac{p}{2\theta};$$

celle des tangentes à (Q) est

$$x - \alpha = ty + \frac{q}{2t};$$

θ, t désignant des parallèles variables. En identifiant ces deux équations, on a

$$t\theta = 1, \qquad \beta + \frac{p}{2\theta} + \frac{\alpha}{t} + \frac{q}{2t^2} = 0.$$

Le paramètre θ, coefficient angulaire des droites Δ, est déterminé par l'équation

(3) $$q\theta^3 + 2\alpha\theta^2 + 2\beta\theta + p = 0.$$

Si l'on pose $\theta = \operatorname{tg} \alpha,$

et si l'on désigne par θ_1, θ_2, θ_3 les racines de l'équation (3), on a

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{-\frac{2\alpha}{q} + \frac{p}{q}}{1 - \frac{2\beta}{q}} = \frac{p - 2\alpha}{q - 2\beta}.$$

Or, les coordonnées du foyer de P sont $\frac{p}{2}$, β; celles du foyer de Q, sont α, $\frac{q}{2}$. Par suite, le coefficient angulaire μ, de la droite passant par ces deux points, est

(4) $$\mu = \frac{\beta - \frac{q}{2}}{\frac{p}{2} - \alpha} = \frac{2\beta - q}{p - 2\alpha}.$$

Finalement, on a donc

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\mu.$$

Cette relation prouve que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ est constant, si μ est lui-même invariable, comme on le suppose.

Quant au point de rencontre des axes des paraboles (P), (Q), d'après (4), il décrit la droite correspondant à l'équation

$$\mu(p - 2x) = 2y - q.$$

3° Soient x_0, y_0, les coordonnées du point R où les paraboles P,Q ont un contact du second ordre.

En transportant les axes en R, les équations des paraboles deviennent

$$(5) \qquad Y^2 + 2Y(y_0 - \beta) = 2pX,$$

$$(6) \qquad X^2 + 2X(x_0 - \alpha) = 2qY.$$

avec les conditions :

$$(7) \qquad (y_0 - \beta)^2 = 2px_0, \quad (x_0 - \alpha)^2 = 2qy_0$$

La tangente δ à l'origine étant la même pour les deux courbes, on a

$$(8) \qquad \frac{y_0 - \beta}{p} = \frac{q}{x_0 - \alpha} = u.$$

Les équations (5), (6) s'écrivent alors

$$Y^2 + 2puY - 2pX = 0,$$

$$uX^2 + 2qX - 2quY = 0.$$

D'après cela, les droites allant de l'origine aux deux autres points communs sont représentées par

$$qY^2 + puX^2 = 0.$$

L'une d'elles, doit être confondue avec δ ; donc

$$u^3 = -\frac{q}{p}.$$

Les relations (7), (8), donnent finalement,

$$x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{pq^2}, \qquad y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{p^2q}.$$

Quant à la tangente au point x_0, y_0, elle est représentée par

$$Y(y_0 - \beta) - pX = 0;$$

son coefficient angulaire est égal à

$$\frac{p}{y_0 - \beta} = \frac{1}{u} = -\sqrt[3]{\frac{p}{q}}.$$

4° Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point α, β ; les formules de transformation sont

$$x - \alpha = X, \qquad y - \beta = Y,$$

et les équations des courbes (P), (Q) sont alors

$$Y^2 - 2pX - 2p\alpha = 0, \qquad X^2 - 2qY - 2q\beta = 0.$$

Soient X′, Y′ les coordonnées d'un point I d'où partent deux tangentes communes à (P) et à (Q). Le faisceau des tangentes, issues de I, peut être, indifféremment, représenté par l'une ou l'autre des équations

$$(Y^2 - 2pX - 2p\alpha)(Y'^2 - 2pX' - 2p\alpha) - (YY' + \ldots)^2 = 0,$$
$$(X^2 - 2qY - 2q\beta)(X'^2 - 2qY' - 2q\beta) - (XX' + \ldots)^2 = 0.$$

En écrivant que les coefficients des termes en Y^2 et en X^2 sont proportionnels, on a

$$\frac{2p(X' + \alpha)}{q^2} = \frac{p^2}{2q(Y' + \beta)},$$

ou, en revenant aux anciens axes,

$$x'y' = \frac{pq}{4}.$$

Ainsi quand α, β varient d'une façon quelconque, le point I est toujours situé sur une hyperbole ayant pour asymptotes les axes ox, oy et passant par le point $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$.

N.-B. Nous avons reçu de M. Leinekugel une solution géométrique des trois dernières parties, accompagnée de diverses remarques intéressantes que, faute de place, nous avons le regret de ne pouvoir insérer.

EXERCICES ÉCRITS

24. — On considère un ellipsoïde qui, rapporté à des axes rectangulaires, a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

1° On demande le lieu des pôles des plans P, qui coupent l'ellipsoïde suivant des ellipses, dont la somme des carrés des longueurs des axes est constante.

2° On trouve comme lieu une surface de quatrième ordre. On mettra en évidence une infinité de quadriques inscrites dans cette surface et une infinité de tangentes doubles.

(Pagès, élève au lycée de Montpellier.)

Note sur l'exercice 23.

Soit ABCD le quadrilatère proposé. Prenons pour axes les droites OE OF, côtés du triangle rectangle isoscèle EOF, conjugué aux coniques considérées. En posant OE = OF = c, l'équation de ces coniques est

(A) $$\lambda x^2 + \mu y^2 + P^2 = 0 \qquad (P \equiv x + y - c).$$

L'hyperbole équilatère H, aux pieds des normales, correspondant à un point P (α, β), est représentée par

$$(\alpha - x)(\mu y + P) - (\beta - y)(\lambda x + P) = 0.$$

En identifiant cette expression avec la suivante

$$\lambda_1 x^2 + \mu_1 y^2 + \nu_1 P^2 = 0,$$

on a six relations entre les paramètres λ, μ, λ_1, μ_1, ν_1. Après avoir éliminé λ_1, μ_1, ν_1, on trouve

(1) $$\lambda\beta = \beta - \alpha + c, \quad \mu\alpha = \alpha - \beta + c,$$

et

(2) $$(\alpha - \beta)(2\alpha\beta - c\alpha - c\beta + c^2) = 0.$$

D'ailleurs, en exprimant que H passe par A (a, b), on a

(3) $$(\alpha - a)(\mu b + a + b - c) - (\beta - b)(\lambda a + a + b - c) = 0.$$

L'élimination de λ et de μ entre (1) et (3), donne

(4) $$\alpha\beta(\alpha - \beta)(2a + 2b - c) - \alpha\beta(a^2 - b^2) - ab(\alpha^2 - \beta^2) + abc(\alpha - \beta) = 0.$$

Abstraction faite des solutions singulières, à l'origine et à l'infini, dans la direction de la bissectrice, on trouve, finalement, que les abcisses des points cherchés sont données par l'équation

(5) $$2\alpha^2 A - 2c\alpha(A + a^2 - b^2) + c^2(A + a^2 - b^2 = 0,$$

après avoir posé, pour abréger l'écriture,

$$A = 2ac + 2bc - 2ab - c^2.$$

2° Pour les deux autres points, les équations

$$\lambda\beta = \beta - \alpha + c,$$
$$\mu\alpha = \alpha - \beta + c,$$

nous donnent λ et μ. Alors on a facilement l'équation des coniques (c), en ayant recours à (A).

3° Il y aura une infinité de points P, lorsque la cubique (7) se décomsera en une droite $(\alpha - p = 0)$, et une conique qui sera l'hyperbole équilatère (A); ou bien lorsque (5) sera identiquement nulle; auquel cas, on a:

$$A = 0 \quad \text{et} \quad a = \pm b.$$

D'après cela, on peut exprimer a et b (coordonnées du point A) en fonction de c.

Le lieu des centres des coniques (c), dans le premier cas, est constitué par deux hyperboles correspondant aux équations

$$2xy + P(2P + c) = 0,$$
$$4xy + P(3P + c) = 0.$$

Dans le second cas, on trouve que le lieu est une parabole

$$(x - y)^2 + c(x + y) = 0.$$

4° Coupons les coniques (c) par un cercle concentrique dont le carré du rayon soit égal à la demi-somme des carrés des longueurs des axes.

Les coniques (c) ont alors pour équation

$$\lambda(x^2 + y^2) + P^2 = 0; \qquad (\lambda = \mu)$$

d'ailleurs le cercle sera représenté par

$$\left(x - \frac{c}{\lambda + 2}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{\lambda + 2}\right)^2 = \frac{1}{2}c^2\left(\frac{\lambda}{(\lambda + 2)^2} + \frac{1}{\lambda + 2}\right).$$

L'élimination de λ entre ces équations donne, pour le lieu demandé, une équation du quatrième degré :

$$[(x-y)^2 + 2cx + 2cy - c^2]^2 - 2c(x+y)[(x-y)^2 + 2cx + 2cy - c^2]$$
$$+ c^2[x^2 + y^2 + (x-y)^2 + 2cx + 2cy - c^2] = 0.$$

Pour construire facilement la courbe correspondante, faisons tourner les axes, autour de l'origine, d'un angle de 45°. La nouvelle équation du lieu est :

$$4y^4 + cy^2(2x\sqrt{2} - c) + c^2x^2 = 0.$$

Sous cette forme, la discussion de la courbe n'offre aucune difficulté.

N.-B. — La solution précédente est de M. Pagès, l'auteur des questions 23, 24.

QUESTIONS D'EXAMENS

7. — *Trouver l'équation du plan osculateur, en un point* M, *d'une courbe* U.

On peut définir le PLAN OSCULATEUR en le considérant comme la position limite d'un plan P passant par le point considéré M et par deux autres points M′, M″ de la courbe U, *arbitrairement choisis*; M′, M″ se rapprochant de M, indéfiniment.

Pour que cette définition puisse être acceptée, il faut établir que cette limite existe, en général, et qu'elle est indépendante de la position des points M′, M″, pris sur la courbe; pourvu qu'ils se confondent avec M, à la limite.

On peut toujours imaginer que les coordonnées d'un poin-mobile sur une courbe U sont des fonctions d'un paramètre variable t. Nous poserons, en conséquence,

$$X = f(t), \quad Y = \varphi(t), \quad Z = \psi(t).$$

Désignons par x, y, z ; x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; les coordonnées respectives des points M, M′, M″. Le plan MM′M″ a pour équation

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z & 0 \\ x & y & z & 1 \\ x_1-x & y_1-y & z_1-z & 0 \\ x_2-x & y_2-y & z_2-z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous supposerons que le point M′ a été obtenu en donnant

à t un accroissement dt; quant au point M'', ses coordonnées correspondent à une valeur $t + hdt$ du paramètre variable t; h désignant une quantité finie, arbitraire.

La formule de Taylor (V. *Alg.* 2ᵉ éd.) donne

$$x_1 - x = dx + \frac{d^2x}{1.2} + \dots$$

dx, d^2x, ... désignant les différentielles successives de x, correspondant à l'acroissement dt.

Si l'on change t en $t + hdt$, les différentielles correspondantes sont multipliées, respectivement, par h, h^2, etc.; et l'on a

$$x_2 - x = hdx + \frac{h^2}{1.2} d^2x + \dots$$

D'après cela, l'équation (1) devient

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z, & 0 \\ x & y & z & 0 \\ dx + \frac{d^2x}{1.2} + \dots & dy + \frac{d^2y}{1.2} + \dots & dz + \frac{d^2z}{1.2} + \dots & 0 \\ hdx + h^2\frac{d^2x}{1.2} + \dots & hdy + h^2\frac{d^2y}{1.2} + \dots & hdz\, h^2\frac{d^2z}{1.2} + \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

En multipliant la troisième ligne par h, et en retranchant ce résultat de la quatrième, on a, finalement, à la limite

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

ou, si l'on veut introduire, explicitement, le paramètre t,

$$\begin{vmatrix} X - f(t) & Y - \varphi(t) & Z - \psi(t) \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f''(t) & \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

QUESTION 128

Solution par M. Paul Bourgarel, à Antibes.

Étant donnés sept points dans un plan, on fait passer par cinq d'entre eux une conique, et l'on joint les deux autres par une droite qui rencontre la conique en deux points A_1, A_2. *Opérant ainsi*

sur tous les points successivement, on obtient quarante-deux points. Démontrer qu'il existe une courbe du sixième degré passant par ces quarante-deux points, et ayant les sept points donnés pour points doubles. Trouver son équation. (Weill.)

Chaque conique et la droite correspondante constituent une cubique passant par les sept points donnés, et les points A_1, A_2 sont des points doubles de ces cubiques. Pour démontrer la proposition il nous suffira donc de démontrer que le lieu des points doubles des cubiques passant par sept points fixes est une courbe du sixième degré.

Or, l'équation générale des cubiques passant par sept points fixes peut évidemment se mettre sous la forme

$$U + \lambda V + \mu W = 0;$$

$U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ étant les équations de trois cubiques particulières passant par les sept points. On prendra pour ces cubiques des cubiques singulières formées par une conique et une droite.

Cela posé le lieu des points doubles s'obtiendra en éliminant λ, μ, ν entre les trois équations :

$$U'_x + \lambda V'_x + \mu W'_x = 0,$$
$$U'_y + \lambda V'_y + \mu W'_y = 0,$$
$$U'_z + \lambda V'_z + \mu W'_z = 0.$$

On obtient ainsi :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} U'_x & V'_x & W'_x \\ U'_y & V'_y & W'_y \\ U'_z & V'_z & W'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du sixième degré.

Démontrons maintenant que cette courbe admet les sept points donnés pour points doubles. A cette effet, observons que (1) peut s'écrire :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} U & V & W \\ U'_x & V'_x & W'_x \\ U'_y & V'_y & W'_y \end{vmatrix} = 0.$$

Cette forme de l'équation montre, tout d'abord, que le lieu passe par les points communs aux trois cubiques $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$; c'est-à-dire, par les sept points donnés.

Représentons par $F(x,y,z) = 0$ l'équation (2), et formons

F'_x, F'_x. On sait que la dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants obtenus en remplacant, successivement, dans le déterminant proposé, les éléments de chaque ligne par les dérivées de ces éléments.

On obtient ainsi :

$$F'_x = \begin{vmatrix} U'_x & V & W \\ U''_{x^2} & V'_x & W'_x \\ U''_{xy} & V'_y & W'_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U & V'_x & W \\ U'_x & V''_{x^2} & W'_x \\ U'_y & V''_{yx} & W'_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U & V & W'_x \\ U'_x & V'_x & W''_{x^2} \\ U'_y & V'_y & W''_{yx} \end{vmatrix}$$

Développons, et observons que U, V, W sont nuls, au point considéré : nous avons

$$F'_x = U_x(V'_xW'_y - V'_yW'_x) - V'_x(U'_xW'_y - U'_yW'_x) + W'_x(U'_xV'_y - V'_xU'_y),$$

ou

$$F'_x = \begin{vmatrix} U'_x & V'_x & W'_x \\ U'_x & V'_x & W'_x \\ U'_y & V'_y & W_y \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est nul. On verrait, de même, que F'_y est nul ; ainsi, les sept points donnés sont au moins des points doubles de la courbe proposée. On peut ajouter que, en général, ils ne sont pas d'une multiplicité supérieure, car une courbe du sixième degré ne peut pas posséder sept points triples.

QUESTION 167

Solution par J. M. BERTHON, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

Une conique étant définie par les points A, B, C, D, E (*) *et une autre conique par les points* A, B, F, G, H, *construire, par la règle et le compas, les autres points d'intersection de ces deux coniques.*

(Amigues.)

Pour fixer les idées, supposons que les deux coniques soient : l'une, une ellipse ; l'autre, une hyperbole.

Je prends comme troisième conique le système des deux droites AD, BC; le théorème de Pascal me permet de trouver l'intersection de chacune de ces droites avec la conique définie par les cinq points ABFGH : elles coupent cette conique aux

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

deux points L, M : les deux cordes CD, LM se coupent en Q ; la corde qui passe par les points d'intersection cherchés, passe par le point Q (d'après ce théorème : *lorsque trois coniques ont deux points communs, les trois autres cordes communes sont concourantes).*

Je prends un second système de deux droites AE, BC. Je détermine, comme précédemment, leurs intersections avec la conique ABFGH, en M, N. Les droites MN, EC se coupent en P ; la corde qui joint les deux points cherchés passe par le point P ; comme elle passe déjà par le point Q, c'est la droite PQ ; on est donc ramené à chercher l'intersection d'une droite et d'une conique.

Considérons les points E et D comme les sommets de deux faisceaux homographiques dont nous avons trois couples (DA, EA) (DB, EB) (DC, EC) de rayons homologues : les points où la droite PQ rencontre la conique sont les points doubles des deux divisions tracées sur la droite par les deux faisceaux. Le problème est ainsi ramené à construire les points doubles de deux divisions homographiques de même base et déterminées par trois couples de points homologues (a, a'), (b, b') (P,Q).

Solutions analogues par MM. Sylvestre Callé, élève au lycée de Grenoble ; G. Leinekugel, élève au lycée de Douai.

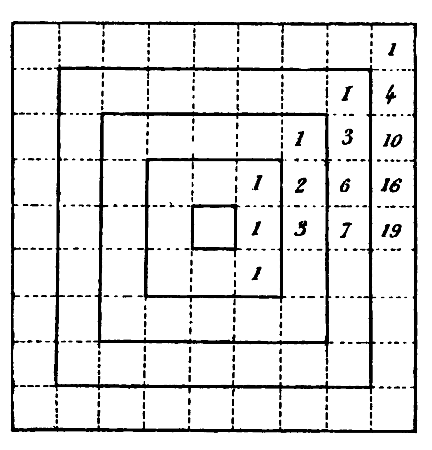
QUESTION 179

Solution par M. J. CHAPRON, à Bragelogne.

On sait que le roi, aux échecs, ne peut se déplacer à chaque coup qu'en occupant l'une des huit cases voisines qui l'entourent. Cela posé, démontrer que les nombres des trajets différents que le roi peut effectuer sur un échiquier indéfini, pour se rendre d'une case donnée à une autre case donnée, par le nombre minimum de coups sont respectivement égaux aux coefficients du développement des puissances du trinôme $(x^2 + x + 1)$ (*). (Edouard Lucas.)

(*) Dans la figure qui accompagne cette solution, les nombres placés sur chaque case indiquent le nombre de trajets nécessaires pour y parvenir, en partant de la case centrale et en effectuant le minimum de coups.

Décomposons l'échiquier en carrés concentriques dont le premier soit la case de départ; désignons par *première bande* les huit cases qui entourent le premier carré, par *deuxième bande* les seize cases qui entourent le second carré, etc. Le nombre minimum de coups, pour parvenir à la $n^{\text{ième}}$ bande, est n. Cela posé, partons de la case située au coin supérieur de droite, descendons le long de cette bande, et numérotons 1, 2, 3... les cases successivement rencontrées. Les nombres de trajets correspondant à ces cases seront les coefficients de $(x^2+x+1)^n$. Vérifions que si la loi est vraie pour la $(n-1)^e$ bande, elle l'est pour la suivante. Pour se rendre à la case 1 de la $n^{\text{ième}}$ bande, il faut que l'avant-dernière case parcourue se trouve dans la $(n-1)^e$ bande (car autrement l'on aurait déjà effectué au moins n déplacements), et de plus soit contiguë à la case d'arrivée; c'est donc la case 1 de la $(n-1)^e$ bande. De même, pour parvenir à la case 2, il a fallu passer en dernier lieu, par les cases 1 ou 2 de la bande précédente; pour la case 3 de la bande considérée, par les cases 1, 2 ou 3 de la $(n-1)^e$,...; et en général par les cases $p-2$, $p-1$ ou p de la $(n-1)^e$ bande, pour se rendre à la $p^{\text{ième}}$ case de la $n^{\text{ième}}$.



Ainsi, les nombres cherchés, dans la $n^{\text{ième}}$ bande, pour les cases 1, 2, 3,... p, seront : le nombre correspondant à la case 1 de la $(n-1)^e$, la somme des nombres correspondant aux cases 1 et 2 de la $(n-1)^e$, la somme des nombres correspondant aux cases 1, 2, 3 de la $(n-1)^e$ bande..., et la somme des nombres affectés aux cases $p-2$, $p-1$, p de la $(n-1)^e$ bande, c'est-à-dire le 1er, le 2e, le 3e,... le $p^{\text{ième}}$ coefficient de $(x^2+x+1)^n$.

Or la loi est évidemment vraie pour la 1re bande; le théorème est donc démontré.

QUESTION 202

Solution par M. Roux, élève au Lycée de Grenoble.

On donne une ellipse fixe de foyers F *et* F′. *Une parabole dont le foyer est* F *est tangente à l'ellipse. Lieu du sommet* S *de cette parabole, quand elle se déforme.* (Bordàge.)

Soit M le point où la parabole considérée P touche l'ellipse donnée. MF′est un diamètre de P; le sommet S se trouve donc situé sur une droite menée par F, parallèlement à MF′. Traçons la tangente MT, et projetons F, en B, sur MT; ce point B appartient à la tangente au sommet. En d'autres termes l'angle FSB est droit. On sait aussi que OB est parallèle à MF′, l'angle SBO est donc droit. D'après cela, si l'on considère le cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre, le lieu du point S peut être regardé comme la polaire du foyer F, relativement à ce cercle; ce lieu est un limaçon de Pascal.

Solutions semblables par MM. Leinekugel, du lycée de Douai; Henri Seauve, du lycée de Grenoble; A. Favery, du lycée de Montpellier; L. Delbonry, maître répétiteur à Agen.

QUESTION PROPOSÉE

272. — On donne deux ellipses concentriques et homothétiques. En un point quelconque M, de l'ellipse intérieure, on mène la normale qui rencontre les axes en P, Q; on trace aussi la tangente qui coupe l'ellipse extérieure en R, S. Démontrer que les angles PRQ, PSQ sont invariables.

(L. Neuberg.)

Erratum. — Les questions proposées dans le numéro de juillet doivent porter les numéros 270, 271. Elles ont, par erreur, été numérotées 327, 328.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 18636-8-9.

SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION
DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **Mangeot**, professeur de mathématiques spéciales
au Lycée de Troyes.

Pour résoudre algébriquement l'équation du troisième degré

(1) $$x^3 + px + q = 0,$$

dans laquelle les coefficients p et q sont réels ou imaginaires, et différents de zéro, on peut poser

$$x = \alpha z + \frac{\beta}{z};$$

et l'on a

$$\left(\alpha^3 z^3 + \frac{\beta^3}{z^3} + q\right) + (3\alpha\beta + p)\left(\alpha z + \frac{\beta}{z}\right) = 0.$$

Cette équation sera vérifiée si l'on assujettit les trois indéterminées α, β, z, aux conditions suivantes :

$$3\alpha\beta + p = 0, \quad z^3 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + q = 0.$$

On en déduit

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}, \quad \alpha + \beta = \frac{3q}{p}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Soient

$$a = \frac{3q}{2p} - \frac{3}{p}\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad b = \frac{3q}{2p} + \frac{3}{p}\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

les deux racines de

$$X^2 - \frac{3q}{p}X - \frac{p}{3} = 0.$$

L'équation (1) aura trois racines, correspondant à la formule

(2) $$x = a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \frac{b}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}},$$

que l'on peut écrire (*)

$$x = \sqrt[3]{a^2b} + \frac{ab}{\sqrt[3]{a^2b}} = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}a} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{p}{3}a}},$$

ou

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}. \quad (**)$$

REMARQUE. — Pour que deux des trois racines x soient égales, il faut et il suffit qu'en désignant par c, c', c'', les trois valeurs de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, on ait la relation :

$$ac + \frac{b}{c} = ac' + \frac{b}{c'}.$$

Celle-ci donne, successivement :

$$cc' = \frac{b}{a}, \quad \frac{b}{ac''} = \frac{b}{a}, \quad c'' = 1.$$

La condition est donc $a = b$, c'est-à-dire $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$.

Pour $a = b = \frac{3q}{2p}$, la formule (2) donne

$$x = \frac{3q}{p}, \qquad \text{puis} \qquad x = -\frac{3q}{2p}:$$

la seconde de ces quantités est la racine double.

(*) Car les trois valeurs de $a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ sont égales à celles de $\sqrt[3]{a^3 \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt[3]{a^2b}$.

(**) La formule

$x = b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \frac{a}{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$ doit définir aussi des solutions de l'équation (1). Mais elles sont les mêmes que les précédentes, parce que les trois valeurs de $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ sont les inverses de celles de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. *A priori*, il devait en être ainsi, une équation de degré m, n'avant que m racines.

SUR LES SURFACES

ADMETTANT LES PLANS DE SYMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE RÉGULIER ET DU CUBE

Par M. **Ernest Lebon**,

Professeur de mathématiques au lycée Charlemagne.

(*Suite*, voir p. 193.)

Cylindres asymptotes.

31. — *Quand* $-2d = c$, *et que* b *et* c *sont de signes contraires, la surface* S_4 *a quatre cylindres asymptotes de révolution, égaux, ayant chacun, pour axe, une diagonale du cube directeur, et ayant, avec la surface un contact du second ordre.*

Il existe, sur chaque cylindre asymptote, six génératrices ayant un contact du troisième ordre avec la surface S_4 ; pour le cylindre asymptote correspondant à l'équation

$$o = b + c(x''^2 + y''^2),$$

les six droites sont données par les trois plans, correspondant aux équations :

$$x'' = o, \qquad x'' = \pm \sqrt{3}\, y''.$$

Ces génératrices sont sur la surface S_4, lorsque $7b^2 = 4ac$.

32. — *Quand* c *est nul et que* b *et* d *sont de signes contraires, la surface* S_4 *admet trois cylindres asymptotes de révolution autour des trois axes de première espèce.*

Cône circonscrit concentrique.

33. — Tirant de l'équation (15) la valeur de z^2, on trouve sous le radical une fonction de m et de n ; en égalant cette fonction à zéro, en y remplaçant m et n par leurs valeurs tirées des équations (14), on obtient l'équation suivante d'un *cône circonscrit, concentrique* à une surface S_4 :

$$(18) \qquad o = (b^2 - ac)(x^4 + y^4 + z^4) + 2(b^2 - ad)(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2);$$

ce cône a les mêmes axes et les mêmes plans de symétrie que la surface S_4.

34. — Lorsque le binôme $b^2 - ac$ est positif, la discussion de l'équation (18) est la même que celle de l'équation (16), et on trouve : 1° un *cône circonscrit concentrique, de première espèce*, formé de quatre cônes compagnons égaux, de même sommet, entourant les diagonales du cube directeur; 2° un *cône circonscrit concentrique, de seconde espèce*, formé de trois cônes compagnons égaux, de même sommet, ayant chacun pour axe de symétrie l'un des trois axes de première espèce.

Quand $b^2 - ac > o$, *le cône circonscrit concentrique :*

1° est imaginaire, si l'on a $b^2 > \frac{a(c + 2d)}{3}$;

2° se réduit aux quatre diagonales du cube directeur, si $b^2 = \frac{a(c + 2d)}{3}$;

3° est de première espèce, si l'on a $\frac{a(c + 2d)}{3} > b^2 > \frac{a(c + d)}{2}$;

4° se décompose en quatre plans, respectivement perpendiculaires aux diagonales du cube directeur, en son centre, si $b^2 = \frac{a(c+d)}{2}$;

5° est de seconde espèce, si l'on suppose $b^2 < \frac{a(c + d)}{2}$.

Quand $b^2 - ac = o$, *le cône circonscrit concentrique se réduit aux trois axes de symétrie, de première espèce.*

Lorsque le binôme $b^2 - ac$ est négatif; on revient au cas où il est positif, en changeant les signes de l'équation (18). Il faut alors remplacer, dans l'énoncé précédent : $<$ par $>$ et $>$ par $<$

Cylindre circonscrit.

35. — Si l'on ordonne l'équation (5) par rapport à y, on a une équation bicarrée, et l'on trouve qu'*il y a deux cylindres circonscrits à une surface* S_4 *et parallèles à un axe de symétrie, de première espèce ;* l'un est *tangent*, selon la section par un plan

de symétrie de première espèce ; l'autre est *bitangent*. Les traces de ces cylindres, sur le plan de symétrie qui leur est perpendiculaire, forment les *contours apparents* de la surface sur ce plan.

Classification.

36. — La nature du cône asymptote concentrique et des cylindres asymptotes des surfaces S_4 conduit à les diviser en *huit groupes*.

Groupe I : Surfaces S_4 dont le cône asymptote concentrique se réduit aux trois axes de première espèce :

$$b \geqslant 0, \qquad c = 0, \qquad d > 0.$$

Groupe II : Surfaces S_4 douées de trois cylindres asymptotes, de révolution autour des trois axes de première espèce :

$$b < 0, \qquad c = 0, \qquad d > 0.$$

Groupe III : Surfaces S_4 dénuées de cône asymptote concentrique :

$$c > 0 \begin{cases} d < 0, \\ d = 0, \\ -d < \dfrac{c}{2}. \end{cases}$$

Groupe IV : Surfaces S_4 dont le cône asymptote, concentrique, se réduit aux quatre diagonales du cube directeur :

$$\left.\begin{matrix} b > 0 \\ b = 0 \end{matrix}\right\} \quad c > 0, \quad -d = \frac{c}{2}.$$

Groupe V : Surfaces S_4 ayant quatre cylindres asymptotes, de révolution autour des quatre diagonales du cube directeur :

$$b < 0, \qquad c > 0, \qquad -d = \frac{c}{2}.$$

Groupe VI : Surfaces S_4 ayant un cône asymptote, de première espèce :

$$c > 0, \qquad \frac{c}{2} < -d < c.$$

Groupe VII : Surfaces S_4 dont le cône asymptote, concentrique, se décompose en quatre plans perpendiculaires aux quatre diagonales du cube directeur :

$$c > 0 \quad , \quad -d = c,$$

Groupe VIII : Surfaces S_4 ayant un cône asymptote de seconde espèce :

$$c > 0 \quad , \quad -d > c.$$

Pour former ces huit groupes, nous n'avons pas tenu compte du coefficient a. Or, la sphère (17) est réelle lorsque a et b ont des signes différents; elle est imaginaire lorsque a et b ont le même signe ou que a est nul. Le cône asymptote concentrique coupant la surface S_4 selon une courbe située sur cette sphère, les propriétés d'une surface S_4 dépendent des conditions de réalité du cône et de la sphère concentriques; on est donc amené à former des *classes* de surfaces en associant les conditions des huit groupes avec chacune des *huit* conditions suivantes :

$$\left.\begin{matrix} a > 0 \\ a = 0 \\ a < 0 \end{matrix}\right\} b < 0; \qquad \left.\begin{matrix} a > 0 \\ \\ a < 0 \end{matrix}\right\} b = 0; \qquad \left.\begin{matrix} a > 0 \\ a = 0 \\ a < 0 \end{matrix}\right\} b > 0.$$

Lorsque $c = 0$, on peut supposer que d est positif. Lorsque $c \neq 0$, on peut supposer que c est positif. Ces hypothèses étant admises, on obtient *quarante-neuf classes* de surfaces S_4, en exceptant celles qui sont évidemment imaginaires.

En prenant, pour fondement de la division des classes en *genres* sur la nature ducône circonscrit concentrique, nous avons trouvé *cent quatorze genres.*

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMEN

8. — *Condition pour que la courbe correspondant aux équations :*

(A) $\quad X = f(t), \qquad Y = \varphi(t), \qquad Z = \psi(t).$

soit plane.

Considérons une courbe U, et supposons que les coordonnées de ses différents points se calculent par les formules (A).

Pour que le point (X, Y, Z), mobile quand t varie, soit situé dans un plan fixe, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$Af(t) + B\varphi(t) + C\psi(t) + D \equiv 0,$$

quel que soit t.

L'identité précédente donne

$$A f'(t) + B\varphi'(t) + C\psi'(t) \equiv 0,$$
$$A f''(t) + B\varphi''(t) + C\psi''(t) \equiv 0,$$
$$A f'''(t) + B\varphi'''(t) + C\psi'''(t) \equiv 0.$$

On a donc, comme condition nécessaire,

$$\begin{vmatrix} f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f''(t) & \varphi''(t) & \psi''(t) \\ f'''(t) & \varphi'''(t) & \psi'''(t) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Réciproquement, si cette identité est vérifiée, la courbe considérée est plane.

En effet, la relation précédente prouve que l'on a

(1) $$\lambda f'(t) + \mu\varphi'(t) + \nu\psi'(t) = 0,$$
(2) $$\lambda f''(t) + \mu\varphi''(t) + \nu\psi''(t) = 0,$$
(3) $$\lambda f'''(t) + \mu\varphi'''(t) + \nu\psi'''(t) = 0,$$

pour des valeurs de λ, μ, ν, qui ne sont pas toutes nulles. Soit $\nu \neq 0$. La relation

$$\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) f'(t) + \left(\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi'(t) + \psi'(t) = 0,$$

différentiée par rapport à t, donne

$$\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)' f'(t) + \left(\frac{\mu}{\nu}\right)'\varphi'(t) + \left(\frac{\lambda}{\nu}\right) f''(t) + \left(\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi''(t) + \psi''(t) = 0;$$

ou, en tenant compte de (2),

(4) $$\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)' f'(t) + \left(\frac{\mu}{\nu}\right)'\varphi'(t) = 0.$$

On trouve, de même, en différentiant (2),

(5) $$\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)' f''(t) + \left(\frac{\mu}{\nu}\right)'\varphi''(t) = 0.$$

Les relations (4) et (5) donnent

(6) $$\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)' = 0, \qquad \left(\frac{\mu}{\nu}\right)' = 0,$$

si l'on n'a pas $f'\varphi'' - \varphi' f'' = 0$.

Supposons donc, d'abord,

$$f'\varphi'' - \varphi' f'' \neq 0.$$

Dans ce cas, les égalités (6) prouvent que $\frac{\lambda}{\nu}$ et $\frac{\mu}{\nu}$ sont des constantes; en désignant la première par α, l'autre par β, la relation (1) s'écrit :

$$\alpha f'(t) + \beta\varphi'(t) + \psi'(t) = 0.$$

On a donc $\alpha f(t) + \beta\varphi(t) + \psi(t) = \text{const.};$

et cette égalité prouve que le point X, Y, Z est mobile dans un plan fixe, correspondant à l'équation

$$\alpha X + \beta Y + Z = \text{const.}$$

Revenons maintenant à l'hypothèse particulière :

$$f'\varphi'' - \varphi' f'' = 0.$$

On peut l'écrire ainsi :

$$\frac{f'}{f''} = \frac{\varphi'}{\varphi''}.$$

En intégrant, il vient $Lf' = LK\varphi'$,

ou $$f' = K\varphi';$$

et, en intégrant de nouveau,

$$f = K\varphi + K'.$$

Finalement, on a

$$X = KY + K'.$$

Ainsi, le point est mobile dans le plan qui correspond à cette équation.

AGRÉGATION (*) (Concours de 1889.)

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

THÉORIE. — Exposer le principe de la méthode donnée par Laplace pour l'intégration de l'équation (E) aux dérivées partielles :

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2z}{dxdy} + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{by} + cz = 0,$$

où a, b, c, désignent des fonctions quelconques de x et de y.

On définira les fonctions h et k des coefficients a, b, c, qui ont été appelés *invariants*, et l'on justifiera cette dénomination; enfin on établira les conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite de Laplace se termine dans les deux sens.

APPLICATION. — Soient h et k les invariants de l'équation aux dérivées partielles (E), et h_1, k_1, les invariants de l'équation (E_1), obtenue en appliquant la méthode de Laplace.

Trouver les formes que doivent avoir les invariants h et k pour que l'on ait les deux relations :

$$h_1 = lh, \qquad k_1 = mk,$$

l et m étant des constantes.

Déterminer les formes que prennent, dans ces conditions, les coefficients a, b, c, de l'équation (E).

Voyez, p. 203, les énoncés des autres questions.

Composition de Mécanique rationnelle.

On donne une surface S, dont l'équation, par rapport à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, est

$$z = e^{x+y},$$

e désignant la base des logarithmes népériens.

Un point matériel M, dont on prend la masse pour unité, est assujetti à se mouvoir sur la surface S; il est, en outre, soumis à l'action de forces extérieures données.

La surface S tourne, avec une vitesse angulaire constante ω, autour de la droite OA dont les équations, par rapport aux axes ox, oy, oz, sont

$$x = y = z.$$

1° Former les équations différentielles qui définissent le mouvement relatif du point M sur la surface mobile S;

2° Calculer la réaction N de cette surface;

3° Étudier ce mouvement relatif, en supposant le point M attiré vers le point O par une force F proportionnelle à la distance MO, et vers le plan P, mené par le point O perpendiculairement à la droite OA, par une force F_1 proportionnelle à la distance Mm du point M à ce plan P.

Les intensités des forces F et F_1, à l'unité de distance, ont respectivement pour valeur ω^2 et 3ω.

A l'origine du temps, le mobile M se trouve au point ayant pour coordonnées

$$x = y = 0, \qquad z = 1.$$

De plus, au même instant,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2\omega}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2\omega}{\sqrt{3}}.$$

EXERCICES ÉCRITS

25. — On considère les trois ellipses qui touchent deux côtés d'un triangle ABC, aux extrémités du troisième, et qui passent, en outre, par le centre de gravité. On propose :

1° D'étudier l'intersection de ces ellipses avec le cercle circonscrit au triangle ABC.

2° De démontrer que si l'on prend, sur chaque ellipse, un point tel que les tangentes en ces points forment un triangle homologique à ABC; le triangle des points de contact est aussi homologique à ABC. *(Balitrand.)*

Notes sur l'exerce 24.

Soit

(P) $$ux + vy + wz - p = 0,$$

l'équation du plan P. Coupons l'ellipsoïde par ce plan et formons l'équation aux carrés des longueurs des axes de la section.

On sait que l'équation aux carrés des longueurs des demi-axes de la section, déterminée par le plan central P', parallèle à P, est

$$\frac{a^2u^2}{a^2-\rho^2}+\frac{b^2v^2}{b^2-\rho^2}+\frac{c^2w^2}{c^2-\rho^2}=0.$$

Les sections faites dans l'ellipsoïde, par les deux plans dont les équations sont :

$$ux+vy+wz=0 \qquad \text{et} \qquad ux+vy+wz-p=0,$$

sont homothétiques: calculons le rapport d'homothéthie.

Pour cela, changeons d'axes, et rapportons l'ellipsoïde à trois diamètres conjugués; dont deux seront les axes de la section par P' et le troisième le diamètre conjugué OB.

Soit A le point où OB rencontre P.

Posons : $\quad OB=d, \quad OA=l.$

L'ellipsoïde a alors pour équation :

$$\frac{X^2}{\rho^2}+\frac{Y^2}{\rho'^2}+\frac{Z^2}{\rho''^2}-1=0.$$

Faisons $Z=l$; les carrés des longueurs des demi-axes de la section sont, dans ce cas :

$$\frac{\rho'^2}{1-\dfrac{l^2}{d^2}}, \qquad \frac{\rho''^2}{1-\dfrac{l^2}{d^2}};$$

ρ', ρ'', représentent les longueurs des demi-axes de la section centrale. Le rapport d'homothéthie est alors :

$$1-\frac{l^2}{d^2}.$$

Or, on a

$$\frac{l^2}{d^2}=\frac{\overline{OC}^2}{\overline{OD}^2};$$

OD étant la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent Q, parallèle à P. De là, nous concluons :

$$1-\frac{l^2}{d^2}=1-\frac{p^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}=\frac{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-p^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}.$$

Si ρ_1 désigne la longueur d'un axe de la nouvelle section, et ρ celle de l'axe correspondant dans la section centrale, on a :

$$\frac{\rho'^2}{\rho^2}=\frac{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-p^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}.$$

Alors l'équation en ρ, qui était .

$$\rho^4(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)-\rho^2[a^2u^2(b^2+c^2)+b^2v^2(a^2+c^2)+c^2w^2(a^2+b^2)] + a^2b^2c^2(u^2+v^2+w^2)=0,$$

devient

$$\rho_1^4\frac{(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)^3}{(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-p^2)^2}-\rho_1^2\frac{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-p^2}$$
$$[a^2u^2(b^2+c^2)+b^2v^2(a^2+c^2)+c^2w^2(a^2+b^2)]+a^2b^2c^2(u^2+v^2+w^2)=0.$$

Si nous écrivons que la somme des carrés des longueurs des axes est constante, nous avons

$$\frac{[a^2u^2(b^2+c^2)+b^2v^2(a^2+c^2)+c^2w^2(a^2+b^2)](a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-d^2)}{(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)^2}=K^2.$$

D'ailleurs, si x', y', z', sont les coordonnées du pôle du plan P, représenté par

$$ux+vy+wz-p=0,$$

on a

$$\frac{\frac{x'}{a}}{au} = \frac{\frac{y'}{b}}{bv} = \frac{\frac{z'}{c}}{cw} = \frac{1}{p}.$$

Éliminant u, v, w, d entre ces relations et la précédente, on a l'équation du lieu demandé :

$$(1) \quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left[(b^2+c^2)\frac{x^2}{a^2}+(a^2+c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2+b^2)\frac{z^2}{c^2}\right] = K^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2.$$

2° Posons
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 \equiv E \qquad (A)$$

$$(b^2+c^2)\frac{x^2}{a^2}+(a^2+c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2+b^2)\frac{z^2}{c^2} \equiv C: \qquad (B)$$

il vient, pour l'équation du lieu

$$CE - K^2(E+1)^2 = 0.$$

Il est évident que cette surface est l'enveloppe des quadriques représentées par l'équation

$$(2) \qquad \lambda^2.E - 2K.\lambda(E+1) + C = 0.$$

Toutes les génératrices des quadriques (2), qui couperont la surface (1) suivant deux courbes planes, seront des tangentes doubles de cette surface.

La courbe d'intersection est sur la surface représentée par

$$\lambda E + K(E+1)\ 0,$$

ou

$$(3) \qquad E = -\frac{K}{\lambda+K}. \qquad (C)$$

Elle est aussi sur la quadrique dont l'équation est

$$C = 2K\lambda(E+1) - \lambda^2 E.$$

Les identtiés (A), (B), prouvent que cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$(a^2+b^2+c^2)E - S = 2K\lambda(E+1) - \lambda^2 E,$$

S désignant le premier membre de l'équation de la sphère de Monge.

On a donc $\quad S = E(a^2+b^2+c^2-2K\lambda+\lambda^2) - 2K\lambda$;

ou, d'après (C),

$$(4) \qquad S = -\frac{K}{K+\lambda}(a^2+b^2+c^2-2K\lambda+\lambda^2) - 2K\lambda.$$

Nous voyons déjà que la courbe d'intersection est une courbe sphérique; et, si nous écrivons qu'elle se décompose, nous aurons deux cercles. Formons donc l'équation du cône qui passe par l'intersection de (3) et (4), et exprimons qu'il se décompose en un système de deux plans : nous aurons, par là, les valeurs de λ donnant les quadriques dont les génératrices sont des tangentes doubles. On trouve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{K}{\lambda+k} = \frac{\lambda}{\lambda+K},$$

puis

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{(K+\lambda)(a^2+b^2+c^2) - K(a^2+b^2+c^2-2K\lambda-\lambda^2) - 2K\lambda(K+\lambda)}{\lambda+k},$$

ou bien
$$x^2+y^2+z^2 = \frac{+\lambda(a^2+b^2+c^2) - \lambda^2 K}{\lambda+K}.$$

L'équation du cône est donc

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{\lambda}{\lambda+K}\,\frac{(x^2+y^2+z^2)(\lambda+K)}{\lambda(a^2+b^2+c^2-\lambda K)}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2-K\lambda},$$

ou

$$x^2\left(\frac{a^2+b^2+c^2-K\lambda}{a^2}-1\right)+y^2\left(\frac{a^2+b^2+c^2-K\lambda}{b^2}-1\right)$$
$$+z^2\left(\frac{a^2+b^2+c^2-K\lambda}{c^2}-1\right)=0.$$

Le cône se réduit à deux plans, pour trois valeurs de λ :

$$\lambda_1=\frac{b^2+c^2}{K},\qquad \lambda_2=\frac{a^2+c^2}{K},\qquad \lambda_3=\frac{a^2+b^2}{K}.$$

Nous aurons alors trois surfaces du deuxième degré correspondantes, et par suite six familles de droites qui sont des tangentes doubles.

N.-B. — Cette solution est de M. Pagès.

QUESTION 84 (Année 1883).

Solution par M. Paul Bourgarel, à Antibes.

On donne une ellipse ayant pour foyers F, F', *et un point* P(α,β). *Par le point* P, *on mène les tangentes* PM *et* PM' *à la courbe, puis on mène les normales en* M *et* M'. *Ces normales coupent* PF, PF' *aux points* A, B, C, D. *Le quadrilatère* ABCD, *ainsi obtenu, est inscriptible.*

1° *Trouver l'équation du cercle circonscrit* (C).

2° *A chaque point* P *correspond un cercle* (C). *On mène, à l'un de ces cercles, les tangentes* Fm, F'm'. *Calculer le rapport* $\frac{Fm}{F'm'}$.

3° *Que devient le cercle* (C) *quand le point* P *décrit le cercle circonscrit à l'ellipse ? Quand il décrit le cercle de rayon* $\sqrt{a^2+b^2}$, a *et* b *étant les demi-axes de la courbe ?*

4° *Trouver le lieu géométrique des points* P, *pour lesquels le cercle* (C) *passe par un point donné ; cas où le point est l'un des foyers.*

5° *Trouver l'enveloppe des cercles* (C), *quand le point* P *décrit l'une des tangentes aux extrémités du grand axe.* (X. A.)

I. — Soit

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0.$$

l'équation de l'ellipse, rapportée à ses axes.

Désignons par $Q(x_0, y_0)$ le point de rencontre des normales en M et M'. Les coordonnées du point Q sont données par les formules connues

$$x_0 = -\frac{c^2\alpha(\beta^2 - b^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \qquad y_0 = \frac{c^2\beta(\alpha^2 - a^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}.$$

Cela posé, formons l'équation du faisceau des droites QM et QM'. Ces droites sont perpendiculaires aux tangentes à l'ellipse, issues du point P.

Or, l'équation du faisceau des directions des droites PM, PM' est :

$$(b^2\alpha x + a^2\beta y)^2 - (b^2x^2 + a^2y^2)(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2) = 0;$$

ou, en simplifiant :

$$(\alpha^2 - a^2)y^2 - 2\alpha\beta xy + (\beta^2 - b^2)x^2 = 0.$$

Il résulte, de cette équation, que les directions des droites QM, QM' sont données par l'équation :

$$(\beta^2 - b^2)y^2 + 2\alpha\beta xy + (\alpha^2 - a^2)x^2 = 0.$$

Donc l'équation du faisceau des droites QM, QM' est :

$$(1)\quad (\beta^2 - b^2)(y - y_0)^2 + 2\alpha\beta(x - x_0)(y - y_0) + (\alpha^2 - a^2)(x - x_0)^2 = 0.$$

Formons maintenant l'équation du faisceau des droites PF, PF'. Cette équation a la forme :

$$A(x - \alpha)^2 + 2B(x - \alpha)(y - \beta) + C(y - \beta)^2 = 0.$$

En exprimant que les droites représentées par cette équation passent en F et F', on obtient sans difficulté, pour l'équation de ce faisceau :

$$(2)\quad (\alpha^2 - c^2)(y - \beta)^2 - 2\alpha\beta(x - \alpha)(y - \beta + \beta^2(x - \alpha)^2 = 0.$$

Ajoutons les équations (1) et (2) membre à membre : nous obtenons l'équation d'une conique passant par les points A, B, C, D. Or, la considération des équations (1) et (2) montre que cette conique est un cercle. Donc le quadrilatère ABCD est inscriptible, et l'équation du cercle circonscrit est :

$$(3)\ (c)\left\{\begin{array}{l} (\beta^2 - b^2)(y - y_0)^2 + (\alpha^2 - c^2)(y - \beta)^2 \\ + 2\alpha\beta(x - x_0)(y - y_0) - 2\alpha\beta(x - \alpha)(y - \beta) \\ + (\alpha^2 - a^2)(x - x_0)^2 + \beta^2(x - \alpha)^2 = 0; \end{array}\right.$$

ou, en ordonnant :

$$(4)\left\{\begin{array}{l} (x^2 + y^2)(\alpha^2 + \beta^2 - a^2) - 2[\alpha\beta y_0 + x_0(\alpha^2 - a^2)]x \\ - 2[\alpha\beta x_0 + y_0(\beta^2 - b^2) - \beta c^2]y + x_0^2[\alpha^2 - a^2) + 2\alpha\beta x_0 y_0 \\ + y_0^2(\beta^2 - b^2) - \beta^2c^2 = 0. \end{array}\right.$$

Si nous remplaçons x_0 et y_0 par leurs valeurs, nous avons

$$(3)\left\{\begin{aligned}&(x^2+y^2)(\alpha^2+\beta^2-a^2)-\frac{2\alpha b^2c^2(\alpha^2-a^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}x\\&+2\left[\frac{\beta a^2c^2(\beta^2-b^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}+\beta c^2\right]y-\frac{c^4(\beta^2-b^2)(\alpha^2-a^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}-\beta^2c^2=0.\end{aligned}\right.$$

II. — Calculons le rapport des tangentes issues des points F, F'. Le rapport $\dfrac{\overline{Fm}^2}{\overline{F'm'}^2}$ est égal au rapport des résultats de substitution des coordonnées des points F, F', dans l'équation (5). Ainsi

$$\frac{\overline{Fm}^2}{\overline{F'm'}^2}=\frac{c^2(\alpha^2-a^2)-\dfrac{2\alpha b^2c^3(\alpha^2-a^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}-\dfrac{c^4(\beta^2-b^2)(\alpha^2-a^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}}{c^2(\alpha^2-a^2)+\dfrac{2\alpha b^2c^3(\alpha^2-a^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}-\dfrac{c^4(\beta^2-b^2)(\alpha^2-a^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}};$$

ou, en simplifiant :

$$\frac{\overline{Fm}^2}{\overline{F'm'}^2}=\frac{b^2\alpha^2+a^2\beta^2-c^2(\beta^2-b^2)-2\alpha b^2c}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2-c^2(\beta^2-b^2)+2\alpha b^2c};$$

ou enfin :

$$\frac{\overline{Fm}^2}{\overline{F'm'}^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2+c^2-2\alpha c}{\alpha^2+\beta^2+c^2+2\alpha c}=\frac{(\alpha-c)^2+\beta^2}{(\alpha+c)^2+\beta^2}=\frac{\overline{PF}^2}{\overline{PF'}^2}.$$

Donc :
$$\frac{Fm}{F'm'}=\frac{PF}{PF'}.$$

III. — Si le point P décrit le cercle circonscrit à l'ellipse, on a
$$\alpha^2+\beta^2-a^2=0.$$

Le cercle (C) se réduit alors à la droite ayant pour équation :

$$2\alpha b^2x+2\beta(a^2+c^2)y-b^2(a^2+c^2)=0.$$

Ce résultat pouvait être prévu. En effet, lorsque le point P est sur le cercle principal de l'ellipse, les normales en M et M' sont respectivement parallèles à l'une des droites PF, PF'. Donc deux des points A, B, C, D sont rejetés à l'infini.

Supposons maintenant que le point P soit sur le cercle représenté par

$$x^2+y^2=a^2+c^2.$$

Nous avons :
$$\alpha^2+\beta^2=a^2+b^2.$$

Pour voir facilement ce que devient le cercle (C), prenons son équation sous la forme (4), et remarquons, auparavant, que dans le cas actnel on a, entre α, β, x_0, y_0 la relation simple :

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Au moyen de cette relation, l'équation (4) s'écrit ainsi :

$$(x^2 + y^2)(\alpha^2 + \beta^2 - a^2) - 2x_0x(\alpha^2 + \beta^2 - a^2)$$
$$- 2[y_0(\alpha^2 + \beta^2 - b^2) - \beta c^2]y + x_0^2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2)$$
$$+ y_0^2 (\alpha^2 + \beta^2 - b^2) - \beta^2c^2 = 0;$$

ou
$$b^2(x^2 + y^2) - 2b^2x_0x - 2[a^2y_0 - \beta c^2]y$$
$$+ b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - \beta^2c^2 = 0;$$

ou enfin, en remplaçant x_0 et y_0 par leurs valeurs :

$$b^2(x^2 + y^2)[a^2b^2 + b^4 + \beta^2c^2] + 2\alpha b^2c^2(\beta^2 - b^2)x$$
$$+ 2c^2\beta(\beta^2c^2 + \beta^2a^2 + b^4)g - \beta^2b^2c^2(a^2 + b^2 + 2c^2) + b^4c^4 = 0.$$

IV. — Le lieu des points P, pour lesquels le cercle (C) passe par un point donné, s'obtient en remplaçant, dans l'équation du cercle C, x et y par les coordonnées x_1, y_1 du point donné et α, β par x et y.

On obtient ainsi le lieu du quatrième degré ayant pour équation :

$$(x_1^2 + y_1^2)(b^2x^2 + a^2y^2)(x^2 + y^2 - a^2) - 2b^2c^2x_1x(x^2 - a^2)$$
$$+ 2[a^2c^2y(y^2 - b^2) + c^2y(b^2x^2 + a^2y^2)]y_1 - c^4(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$
$$- c^2y^2(b^2x^2 + a^2y^2) = 0.$$

Supposons que le point donné x_1, y_1 soit l'un des foyers, c'est-à-dire que l'on ait par exemple

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = c.$$

L'équation précédente devient alors

$$(b^2x^2 + a^2y^2)(x^2 + y^2 - a^2)c^2 - 2b^2c^3(x^2 - a^2)x$$
$$- c^4(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) - c^2y^2(b^2x^2 + a^2y^2) = 0,$$

ou en simplifiant :

$$(x^2 - a^2)(x^2 + y^2 - 2cx + c^2) = 0,$$

c'est-à-dire, $\quad (x^2 - a^2)[(x - c)^2 + y^2] = 0.$

Le lieu se compose donc des tangentes aux sommets du grand axe de l'ellipse et d'un cercle de rayon nul, ayant pour centre le point F.

V. — Cherchons, enfin, l'enveloppe des cercles (C) quand le

point P décrit l'une des tangentes aux extrémités du grand axe. On a alors $\alpha^2 = a^2$, et l'équation des cercles (C) devient :

$$x^2 + y^2 + \frac{4\beta c^2 y}{\beta^2 + b^2} - c^2 = 0,$$

ou $\beta^2(x^2 + y^2 - c^2) + 4\beta c^2 y + b^2(x^2 + y^2 - c^2) = 0.$

L'enveloppe de ces cercles a pour équation :

$$4c^4y^2 - b^2(x^2 + y^2 - c^2)^2 = 0.$$

Cette enveloppe se compose des deux cercles représentés par:

$$x^2 + y^2 - \frac{2c^2y}{b} - c^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2c^2y}{b} - c^2 = 0.$$

Leur construction est très simple.

QUESTION 124.

Solution par M. A. Valabrègue, élève de mathématiques spéciales au lycée de Montpellier.

On fait une section droite dans un cylindre parabolique. Par le foyer de cette section, on mène, dans le plan de la courbe, une perpendiculaire à l'axe, laquelle coupe la courbe aux points A *et* B. *Au point* A, *on mène, dans le plan de la parabole, la normale* AM *à cette courbe; puis, par* AM, *on fait passer des plans variables. Lieu des foyers des paraboles suivant lesquelles ces plans coupent le cylindre. Ce lieu est une courbe plane.* (Amigues.)

Soient $y^2 = 2px\ z = 0$

les équations de la section droite du cylindre parabolique. Les coordonnées du point A sont

$$x = \frac{p}{2}, \quad y = p, \quad z = 0.$$

Les équations de la normale AM sont

$$x + y - \frac{3p}{2} = 0, \qquad z = 0.$$

Les plans passant par cette droite ont pour équation

$$x + y - \lambda z - \frac{3p}{2} = 0.$$

Soit F le foyer de la section plane, et F_1 sa projection sur le plan xoy. Les tangentes à la section plane, menées par le point F, sont parallèles aux droites isotropes du plan considéré. Les tangentes à la projection de la section plane, sur le plan xoy, menées par le point F_1 sont parallèles aux projections des directions isotropes du plan sécant sur le plan xoy. Soient α, β, γ les coordonnées du foyer F. Les directions isotropes du plan sécant sont les droites d'intersection du plan et du cône.

$$x + y - \lambda z = 0,$$

représentés par

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Les projections de ces droites, sur le plan xoy, correspondent à l'équation

$$x^2 + y^2 + \frac{(x + y)^2}{\lambda^2} = 0.$$

Les parallèles à ces droites, menées par α, β, sont représentées par

$$\lambda^2(x - \alpha)^2 + \lambda^2(y - \beta)^2 + (x + y - \alpha - \beta)^2 = 0.$$

Ces droites doivent être tangentes à la section droite du cylindre

$$y^2 - 2px = 0.$$

Donc, on doit avoir

$$S(y^2 - 2px) + \lambda^2(x - \alpha)^2 + \lambda^2(y - \beta) + [x + y - (\alpha + \beta)] = P^2,$$

c'est-à-dire que les six mineurs du discriminant de la conique correspondant au premier membre, égalé à zéro, doivent être nuls. On sait qu'il suffit d'annuler trois de ces mineurs.

$$AC - B^2 = 0, \qquad AE - BD = 0, \qquad BF - ED = 0.$$

On a donc

(1) $$(1 + \lambda^2)(S + \lambda^2 + 1) - 1 = 0,$$

(2) $$(1 + \lambda^2)(\alpha + \beta + \beta\lambda^2) - \alpha - \beta - \alpha\lambda^2 - Sp = 0,$$

(3) $$(\alpha^2+\beta^2)(1+\lambda^2)+2\alpha\beta-(\alpha+\beta+\beta\lambda^2)(\alpha+\beta+\alpha\lambda^2+Sp)=0.$$

Il faut éliminer λ, S entre ces trois équations et la suivante

$$\alpha + \beta - \lambda\gamma - \frac{3p}{2} = 0.$$

L'équation (1) donne

$$S = -\lambda^2 \frac{\lambda^2 + 2}{\lambda^2 + 1},$$

Portant, dans l'équation (2), cette valeur de S, on a

$$Sp = (\lambda^2 + 2)\beta\lambda^2,$$

et l'équation (3) devient

$$Sp = -\frac{\alpha\beta(\lambda^2 + 2)}{\alpha + \beta + \beta\lambda^2}\lambda^2.$$

Égalons deux à deux les valeurs de S, nous avons

(5) $$(\lambda^2 + 1)\beta + p = 0,$$

et $$(\lambda^2 + 1)\beta + 2\alpha = 0.$$

Donc le lieu est une courbe située dans le plan H correspondant à l'équation

$$\alpha = \frac{p}{2},$$

plan parallèle à yoz et passant par le foyer. Pour avoir l'équation de la courbe, je remplace λ par sa valeur, tirée de (4) :

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta - \frac{3p}{2}}{\gamma}.$$

La substitution dans (5) donne

$$\beta\left[\left(\alpha + \beta - \frac{3p}{2}\right)^2 + \gamma^2\right] + p\gamma^2 = 0.$$

La surface correspondante est coupée par H, suivant une courbe du troisième degré, circulaire, unicursale, dont l'équation, dans ce plan, est

$$y(y - p)^2 + yz^2 + pz^2 = 0.$$

Elle a une asymptote $y = -p$, passant par le point B. Elle passe à l'origine, c'est-à-dire au foyer de la section plane donnée, et a pour tangente en ce point la parallèle à Oz. Elle est symétrique par rapport à AB, et le point A un point double imaginaire.

QUESTION 126

Solution, par M. C. Lamotte, élève au lycée Henri IV.

On considère un triangle ABC *et une parabole. On mène, à la parabole, une tangente* D *parallèle à* BC; *puis, du point* A, *on mène, à la parabole, des tangentes qui rencontrent* D *en* A', A''. *Opérant de*

même pour les deux autres côtés, on obtient six points A', A'', B', B'', C', C''. *Démontrer que ces six points sont sur une conique passant par* A, B, C.

Les triangles AA'A'', BB'B'' étant circonscrits à une conique, leurs six sommets sont sur une même conique Γ. Si l'on prouve que cette conique passe par C, le théorème sera démontré. Considérons les triangles AA'A'', CC'C''. La conique circonscrite à ces triangles passera aussi par B, si l'on accorde la proposition en question. Les deux coniques considérées sont donc confondues, comme ayant cinq points communs A, A', A'', B, C.

Ainsi, tout revient à montrer que si, par A, on mène une parallèle à B'B''; par B, une parallèle à A'A''; ces deux droites se coupent sur la conique Γ. Or, les diverses tangentes de la parabole déterminent, sur les deux tangentes fixes A'A'', B'B'', deux divisions homographiques, pour lesquelles les points à l'infini sont des points homologues. Par suite, les droites AA', AA'', AB', AB'', et AC parallèle à B'B'', d'une part; et leurs homologues BA', BA'', BB', BB'' et BC parallèle à A'A'', d'autre part, se coupent respectivement sur une même conique passant par A et par B.

QUESTIONS 138 ET 168

Solution par M. Charles Martin, Lycée Condorcet.

On donne deux points A, A'; *soit* O *le milieu de la droite qui les joint. On imagine toutes les surfaces de révolution, du second ordre, qui passent en* A, A', *et dont toutes les méridiennes ont pour foyer le point* O.— *1° Lieu des points de contact des plans tangents perpendiculaires à* AA'; — *2° lieu des pôles d'un plan donné, par rapport à ces surfaces;* — *3° en supposant l'excentricité donnée de la méridienne, on demande le lieu des pôles d'un plan donné, le lieu des sommets, le lieu des centres.* (Amigues).

Prenons comme origine le point O, comme axe des z la

droite AA′, et comme axe des x et y deux droites rectangulaires, perpendiculaires à AA′.

Les surfaces de révolution, du second degré, dont les méridiennes ont pour foyer le point O, ont pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (lx + my + nz + p).^2$$

Exprimant que ces surfaces passent par les points A, A′, on a :

$$n = 0, \qquad p = d;$$

en prenant : $\qquad OA = d.$

L'équation générale est donc :

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = (lx + my + d)^2.$$

1° Le lieu demandé s'obtient en éliminant l, m, entre les équations du diamètre conjugué du plan des xy et l'équation de la surface :

$$(2) \qquad x(1 - l^2) - ld - lmy = 0,$$

$$(3) \qquad y(1 - m^2) - md - lmx = 0,$$

$$(4) \quad x^2(1 - l^2) + y^2(1 - m^2) + z^2 - 2d(lx - my) - 2lmxy - d^2 = 0,$$

Multipliant (3) par $-x$, par $-y$, et ajoutant, on obtient :

$$lx + my + d = \frac{z^2}{d}.$$

L'équation cherché est donc

$$z^4 = d^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Elle représente une surface de révolution, du quatrième degré, dont l'axe est la droite AA′.

2° Soient $\qquad Ax + By + Cy + D = 0,$

l'équation du plan donné, et α, β, γ les coordonnées du pôle de ce plan. Le plan polaire de ce point a pour équation :

$$x[\alpha - l(l\alpha + m\beta + d)] + y[\beta - m(l\alpha + m\beta + d)] + z\gamma = d(l\alpha + m\beta + d)$$

Identifiant, on a :

$$\frac{\alpha - l(l\alpha + m\beta + d)}{A} = \frac{\beta - m(l\alpha + m\beta + d)}{B} = \frac{\gamma}{C} = \frac{d(l\alpha + m\beta + d)}{D}.$$

L'équation du lieu cherché s'obtient en éliminant l, m, entre ces trois équations. Or

$$(5) \qquad l\alpha + m\beta + d = -\frac{D\gamma}{dC},$$

$$(6) \qquad l = dC\frac{A\gamma - C\alpha}{D\gamma},$$

$$(7) \qquad m = dC\frac{B\gamma - C\beta}{D\gamma}.$$

En substituant ces valeurs de l, m, dans la première équation et simplifiant, on obtient l'équation du lieu :

$$(8) \qquad C^2d^2(x^2+y^2+z^2)=z[D^2z+Cd^2(Ax+By+Cz+D)].$$

Ce lieu est donc surface du deuxième degré, admettant l'origine comme ombilic et le plan des xy comme plan de sections circulaires.

3° L'excentricité de la méridienne étant donnée, on a la condition :

$$(9) \qquad l^2 + m^2 = e^2.$$

Le lieu demandé est une courbe, intersection de la surface représentée par l'équation (8) et de celle que l'on obtient en portant les valeurs de l et de m dans l'équation (9).

On trouve

$$(10) \qquad (Az - Cx)^2 + (Bz - Cy)^2 = \frac{c^2D^2}{d^2C^2} z^2,$$

équation d'un cône ayant son sommet à l'origine et admettant le plan des xy comme plan de sections circulaires. Les surfaces (8) et (10) se coupent donc suivant deux courbes planes, dont l'une *est le cercle de rayon nul* O. Le lieu est donc *une conique.*

Lieu des sommets. — Ce lieu s'obtient en éliminant, l, m, entre les équations de l'axe :

$$z = 0, \; mx - ly = 0$$

de la surface, et les relations (1), (9). On trouve :

$$\left[x^2 + y^2 - \frac{d^2}{(1 - e)^2}\right]\left[x^2 + y^2 - \frac{d^2}{(1 + e)^2}\right] = 0.$$

Le lieu se compose donc de deux cercles concentriques, situés dans le plan des xy.

Lieu des centres. — Ce lieu s'obtient en éliminant l, m, entre les équations du centre :

$$z = 0,$$
$$x - l(lx + my + d) = 0,$$
$$y - m(lx + my + d) = 0,$$

et la relation $\qquad l^2 + m^2 = e^2.$

On a $\qquad \dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m},$

ou
$$\frac{x^2 + y^2}{e^2} = \frac{x^2}{e^2} = \frac{y^2}{m^2}.$$

Finalement,
$$x^2 + y^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2},$$
équation d'un cercle.

Remarque. — Ces derniers résultats peuvent se vérifier géométriquement, de la manière suivante :

Considérons la section faite, dans l'une des surfaces, par un plan passant par l'axe et la droite AA'. Le point O étant un foyer, la droite AA' est perpendiculaire sur l'axe, qui se trouve donc dans le plan des xy. Soit ω le centre. On a :
$$O\omega = ae,$$
a désignant le demi-grand axe de l'ellipse méridienne ; puis :
$$a - ce = d,$$
d'où
$$a = \frac{d}{1 - e^2}.$$

Donc
$$O\omega = \frac{de}{1 - e^2}.$$

Le lieu du point ω est un cercle, dont le centre est O.

Soient B et B' les sommets. On a :
$$OB = a - O\omega = \frac{d}{1 - e},$$
$$OB' = a + O\omega = \frac{d}{1 - e}.$$

Le lieu des points B et B' se compose donc de deux cercles, dont le centre est O.

QUESTION 178

Solution par J. Chapron, à Bragelogne.

De combien de manières peut-on ranger 3 N *nombres, deux à deux inégaux, sur trois lignes, de telle sorte que les nombres croissent dans chaque ligne, de gauche à droite ; et, dans chaque colonne, de haut en bas?* (Edouard Lucas.)

Désignons par le symbole $[p, q, r]$ le nombre de façons de placer $(p + q + r)$ nombres inégaux sur trois lignes, en en mettant : p dans la première, q dans la deuxième, r dans la troisième. On devra avoir (on suppose $p \geqslant q \geqslant r$) :

$$[p, q, r] = [p - 1, q, r] + [p, q - 1, r] + [p, q, r - 1].$$

Je dis que :

$$[p,q,r] = \frac{(p-q+1)(p-r+2)(q-r+1)(p+3)(p+4)(p+5)\dots(p+q+r)}{r!(q+1)!}.$$

En effet, cette valeur vérifie la relation indiquée. De plus, en multipliant les deux termes par $(p + 2)$, on a $[1, 1, 1] = 1$.

Pour le démontrer, observons qu'en supposant $p = q = r$, le second membre devient

$$\frac{2(p+3)(p+4)(p+5)\dots 3p}{p!(p+1)!}.$$

Si l'on suppose, alors, $p = 1$, on trouve, après avoir multiplié comme nous l'avons dit, par $(p + 2)$, que le nombre cherché est égal à l'unité.

Généralisation. — En poursuivant ce raisonnement, on trouve, pour le nombre de manières de ranger kn nombres inégaux, sur k lignes :

$$\frac{1!2!3!\dots(n-1)!(k+n)(k+n+1)(k+n+2)\dots nk}{k!(k+1)!(k+2)!\dots(k+n-2)!}.$$

QUESTION 191

Solution par M, Ignacio Beyens, capitaine du génie, professeur de mathématiques spéciales, à Cadix.

Si une courbe parabolique, représentée par l'équation

$$y = (x - a)(x - b)\dots(x - k) = f(x)$$

rencontre en A, B, ... K *l'axe des abcisses, et que* A', B' ... H' *soient les pieds des ordonnées des points pour lesquels la tangente est parallèle à cet axe, on a*

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \dots \frac{1}{AK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AA'} + \frac{1}{AB'} + \dots + \frac{1}{AH'}\right).$$

(E. Catalan).

Posons $x = a + z$, l'équation

$$f(a + z) = f(a) + \frac{z}{1} f'(a) + \ldots = 0,$$

admet une racine nulle, puisque $f(a) = 0$. Les autres racines AB, AC, ... AK, sont les racines de l'équation

$$f'(a) + \frac{z}{1.2} f''(a) + \ldots = 0.$$

Nous avons donc, d'après cela,

$$(1) \qquad \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \ldots + \frac{1}{AK} = -\frac{f''(a)}{2f'(a)}.$$

D'autre part, les abcisses des points pour lesquels les tangentes sont parallèles à ox, sont données par l'équation

$$f'(x) = f'(a + z) = -f'(a) + \frac{z}{1} f''(a) + \ldots = 0.$$

Ainsi

$$(2) \qquad \frac{1}{AA'} + \frac{1}{AB'} + \ldots + \frac{1}{AH'} = -\frac{f''(a)}{f'(a)}.$$

La comparaison des égalités (1), (2), prouve l'exactitude de la propriété en question.

Nota. — Solutions analogues par MM. F, Quantin, au lycée Louis-le-Grand, A. Troille, au lycée de Grenoble; J. Moulet, au collège de Manosque; P. Chrétien, au lycée de Caen; A. Lévy, au lycée de Nancy (classe de M. Hervieux); Leinekugel, au lycée de Douai.

NOTE SUR LA QUESTION 183 (*)

Ont résolu cette question: MM. Paul Bourgarel, à Antibes; P. Philippe, élève à l'École J.-B. Say; Paul Grésillon, élève au lycée de Douai; Berthon, élève au lycée de Lyon; G. Rogier; Charles Merle, élève au lycée de Lyon; Frank Balitrand, élève au lycée de Nîmes.

Les solutions de MM. Rogier et Merle offrent l'avantage d'aboutir directement, sans introduire de facteur étranger, au lieu demandé. Mais, a un autre point de vue, il est intéressant d'obtenir, d'un seul coup, les deux lieux géométriques rencontrés dans la solution publiée p. 148: 1° la *Kreuzcurve*, lieu des pôles des cordes normales; 2° l'ellipse demandée.

(*) Une solution à cette question a été publiée dans le numéro de juin (p. 142). Une erreur de mise en pages nous a fait oublier la note ci-jointe.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 20204-9-9

SUR LES SURFACES

ADMETTANT LES PLANS DE SYMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE RÉGULIER ET DU CUBE

Par M. **Ernest Lebon**,
Professeur de mathématiques au lycée Charlemagne.

(*Suite* et *fin*, voir p. 219.)

Droites situées sur les surfaces hexaédriques.

37. — Lorsque l'on cherche la coordonnée z du point d'intersection d'une droite

$$x = mz + p, \qquad y = nz + q$$

et d'une surface S_4, représentée par l'équation (5), on obtient une équation du quatrième degré en z. En égalant à zéro les coefficients des puissances de z et le terme indépendant de cette dernière équation, on obtient cinq équations.

38. — On trouve qu'*une surface* S_4, *représentée par l'équation* (5) *dont aucun coefficient n'est nul, ne peut contenir des droites que s'il existe l'une des équations de condition :*

$$4b^4(c - d)(c^2 - 3cd + 4d^2) - 8ab^2d^3(c - d) + a^2cd^4 = 0,$$
$$b^4(17c - 15d) + 2ab^2(-11c^2 + 7cd + 2d^2) + a^2(c + d)(3c - 2d)^2 = 0,$$

ou si les deux équations de condition

$$(c - d)(c + 2d) = 0,$$
$$b^2(c^2 + 3d^2) - 4acd^2 = 0,$$

sont simultanément vérifiées.

39. — Lorsque a seul est nul ou que b seul est nul, on applique les équations de condition précédentes.

Lorsque c seul est nul, p et q sont donnés par le système

$$p^2 + q^2 = -\frac{b}{d}, \qquad p^2q^2 = \frac{2b^2 - ad}{2d^2}.$$

Lorsque d seul est nul, ou que a et c sont nuls à la fois, ou que b et c sont nuls à la fois, ou que $c = d$, la surface S_4 ne contient pas de droite.

Lorsque $d = -c$, on trouve les quatre équations

$$m + n \pm 1 = 0, \qquad m - n \pm 1 = 0,$$

et on est amené à distinguer les cas où

$$n = 0, \qquad n = -1, \qquad p = -q.$$

Si $n = 0$, la surface S_4 contient des droites quand $p = 0$ et qu'il existe l'équation de condition

$$3b^2 + ac = 0,$$

ou quand p est donné par l'équation

$$4bcp^2 + 3b^2 + ac = 0.$$

Si $n = -1$, les résultats sont analogues aux précédents.

Si $p = -q$, la surface S_4 ne contient pas de droites.

Lorsque $-2d = c$, on trouve : $m^2 = 1$, $n^2 = 1$.
Au système $m = n = 1$ correspondent des droites sur la surface S_4, s'il existe l'une des équations de condition

$$7b^2 = 4\,ac, \qquad 47b^2 = 36\,ac.$$

Surfaces hexaédriques contenant les arêtes du cube ou de l'octaèdre régulier.

40. — Soit un cube, de côté 2δ. Prenons son centre pour origine d'axes rectangulaires, perpendiculaires à ses faces. La section du cube par le plan $z = \delta$ se projette sur le plan XOY selon un système de quatre droites; représentons par (α) l'équation de ce système. Appelons (β) l'équation de la projection, sur le plan XOY, de la section par le même plan d'une surface S_4, représentée par l'équation (5). En identifiant les équations (α) et (β), on obtient les relations

$$c = 0 \qquad \text{et} \qquad 3b^2 = 2ad.$$

Par suite, pour qu'une surface réelle S_4 contienne les quatre droites (α), il faut que l'on ait

$$a > 0, \quad b < 0, \quad c = 0, \quad d > 0, \quad 3b^2 = 2ad.$$

En posant
$$\delta^2 = -\frac{b}{2d},$$

on obtient l'équation suivante d'une surface réelle S_4 contenant les quatre droites (α) :

$$(19) \quad y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 - 2\delta^2(x^2 + y^2 + z^2) + 3\delta^4 = 0.$$

A cause de sa symétrie par rapport aux coordonnées, elle représente une surface S_4 contenant les douze arêtes d'un cube

concentrique de côté 2δ. Nous appellerons *cuboïde* la surface S_4 représentée par l'équation (19).

41. — Soit un octaèdre régulier dont l'arête est égale à $\varepsilon\sqrt{2}$. Prenons ses trois diagonales pour axes de coordonnées rectangulaires. La section de l'octaèdre par le plan XOY est un système de quatre droites; représentons par (α') l'équation de ce système. Appelons (β') l'équation de la section par le même plan d'une surface S_4, représentée par l'équation (5). En identifiant les équations (α') et (β'), on obtient les relations :

$$c = -d, \quad b^2 = ac.$$

Par suite, pour qu'une surface réelle S_4 contienne les quatre droites (α'), il faut que l'on ait

$$a > 0, \quad b < 0, \quad c > 0, \quad d = -c, \quad b^2 = ac.$$

En posant
$$\varepsilon^2 = -\frac{b}{c},$$

on obtient l'équation suivante d'une surface réelle S_4 contenant les quatre droites (α') :

$$(20) \qquad x^4 + y^4 + z^4 - 2(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) - 2\varepsilon^2(x^2 + y^2 + z^2) + \varepsilon^4 = 0.$$

A cause de sa symétrie par rapport aux coordonnées, elle représente une surface S_4 contenant les douze arêtes d'un octaèdre régulier concentrique de côté $\varepsilon\sqrt{2}$. Nous appellerons *octaèdroïde* la surface S_4 représentée par l'équation (20).

42. — *Propriétés du cuboïde (fig. 5).* Le cuboïde n'a ni cône asymptote, ni sections circulaires concentriques. Il a six sommets de première espèce sur la sphère de rayon $\delta\sqrt{\frac{3}{2}}$; vingt-quatre sommets de seconde espèce, douze sur chacune des sphères de rayons $\delta\sqrt{2}$ et $\delta\sqrt{6}$.

Le cuboïde a trois cylindres asymptotes égaux, chacun de révolution autour d'un axe de symétrie de première espèce, contenant, chacun, les quatre droites du cuboïde parallèles à ces axes. L'équation de l'un de ces cylindres est

$$z^2 + x^2 - 2\delta^2 = 0.$$

Chacun des trois cylindres asymptotes du cuboïde est circonscrit à cette surface le long des quatre droites qu'il contient.

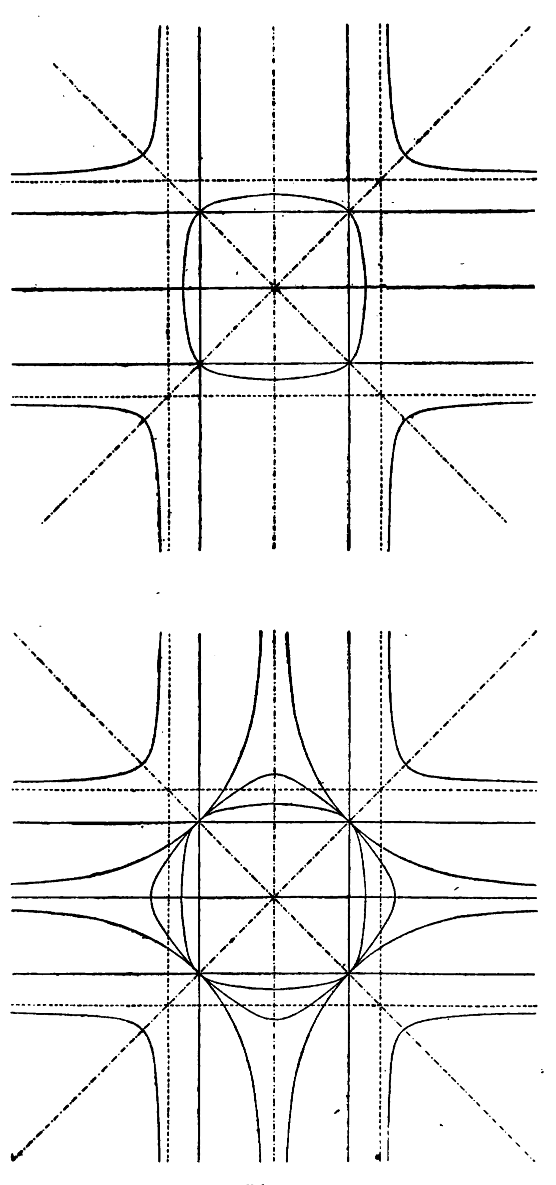


Fig. 5.

Voici les principaux résultats auxquels nous sommes arrivé. Considérons un cube et trois cylindres de révolution contenant chacun quatre arêtes du cube. Le cuboïde est formé d'une nappe finie intérieure aux cylindres, et de six nappes infinies extérieures aux cylindres, contenant les arêtes du cube, tangentes aux cylindres le long de ces arêtes. Tout plan de symétrie, de seconde espèce, coupe le cuboïde selon deux arêtes du cube et la nappe finie selon une ellipse. Le plan tangent au cuboïde le long d'une de ses droites coupe le cuboïde selon cette droite et deux nappes infinies selon une ellipse. Le plan tangent à un cylindre asymptote et parallèle à un plan de symétrie de première espèce coupe le cuboïde selon deux hyperboles équilatères conjuguées.

43. — *Propriétés de l'octaédroïde (fig. 6).* En vertu de la relation $d = -c$, l'octaédroïde admet quatre plans asymptotes passant par son centre et parallèles aux faces de l'octaèdre régulier inscrit. Ces plans sont les lieux des asymptotes des sections de la surface par des plans passant par son centre. Au moyen de l'équation (13), on reconnaît que chacun des quatre plans asymptotes de l'octaédroïde coupe cette surface selon une circonférence concentrique à la surface, de rayon égal à $\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}$. Chacun des trois plans de symétrie, de première espèce, coupe l'octaédroïde selon quatre arêtes de l'octaèdre régulier inscrit.

L'octaédroïde a six cylindres asymptotes hyperboliques égaux, perpendiculaires chacun à un plan de symétrie de seconde espèce, ayant pour plans principaux le plan de symétrie de première espèce et le plan de symétrie de seconde espèce parallèles à ses génératrices, contenant chacun les deux droites de l'octaédroïde perpendiculaires à ces plans. L'équation de l'un de ces cylindres est

$$2x'^2 - z^2 - \varepsilon^2 = 0.$$

Chacun des six cylindres asymptotes de l'octaédroïde est circonscrit à cette surface le long des deux droites qu'il contient.

Voici les principaux résultats auxquels nous sommes

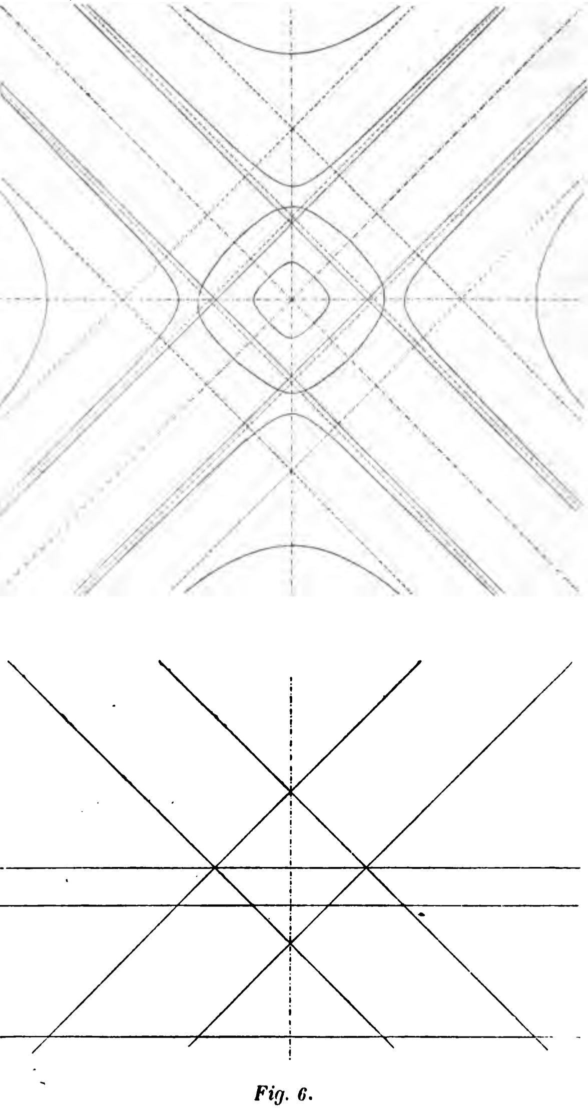


Fig. 6.

arrivé. Imaginons un octaèdre régulier de centre O, dont nous considérons les quatre arêtes issues du même sommet Z situé au-dessus de O. Une nappe N de la surface contient ces quatre arêtes. Soient des plans P perpendiculaires à la diagonale OZ de l'octaèdre; ils déterminent des sections ayant quatre sommets sur les quatre arêtes considérées. Le plan P, qui passe par le point Z, coupe la nappe N en un point; les plans P situés au-dessus de Z, et allant vers $+\infty$, coupent la nappe N selon des courbes finies dont les sommets s'éloignent indéfiniment de la droite OZ; les plans P situés entre Z et O coupent la nappe N selon des courbes finies; le plan P qui passe par O coupe la nappe N selon quatre droites; les plans P situés au-dessous de O, et allant vers $+\infty$, coupent la nappe N selon une courbe ayant quatre branches infinies dont les sommets s'éloignent indéfiniment de la droite OZ. Par les quatre arêtes de l'octaèdre issues du second sommet situé sur la droite OZ, passe une nappe N_1 égale à la nappe N et symétrique par rapport au plan perpendiculaire, en O, à la droite OZ. La surface de l'octaédroïde pouvant être considérée, de trois manières, comme formée de deux nappes égales disposées de même l'une par rapport à l'autre, se compose d'une nappe finie entourant un octaèdre régulier, et de six nappes infinies extérieures à l'octaèdre; la nappe finie et les nappes infinies étant reliées par les arêtes de l'octaèdre.

Propriétés d'un autre genre de surface hexaédrique (fig. 7).

44. — Lorsque les coefficients de l'équation (5) vérifient les relations:

$$a > 0, \quad b < 0, \quad c > 0, \quad d > c, \quad 2b^2 = a(c + d),$$

en posant

$$\gamma = -\frac{c}{b}, \qquad \delta = -\frac{d}{b}, \qquad \varepsilon^2 = \frac{1}{\gamma + \delta},$$

on trouve que l'équation (5) devient

$$\gamma(x^4+y^4+z^4)+2\delta(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2\varepsilon^2 = 0.$$

Nous supposerons que le cube directeur de cette surface a son arête égale à 2ε.

Voici les résultats les plus saillants que nous ayions rencon-

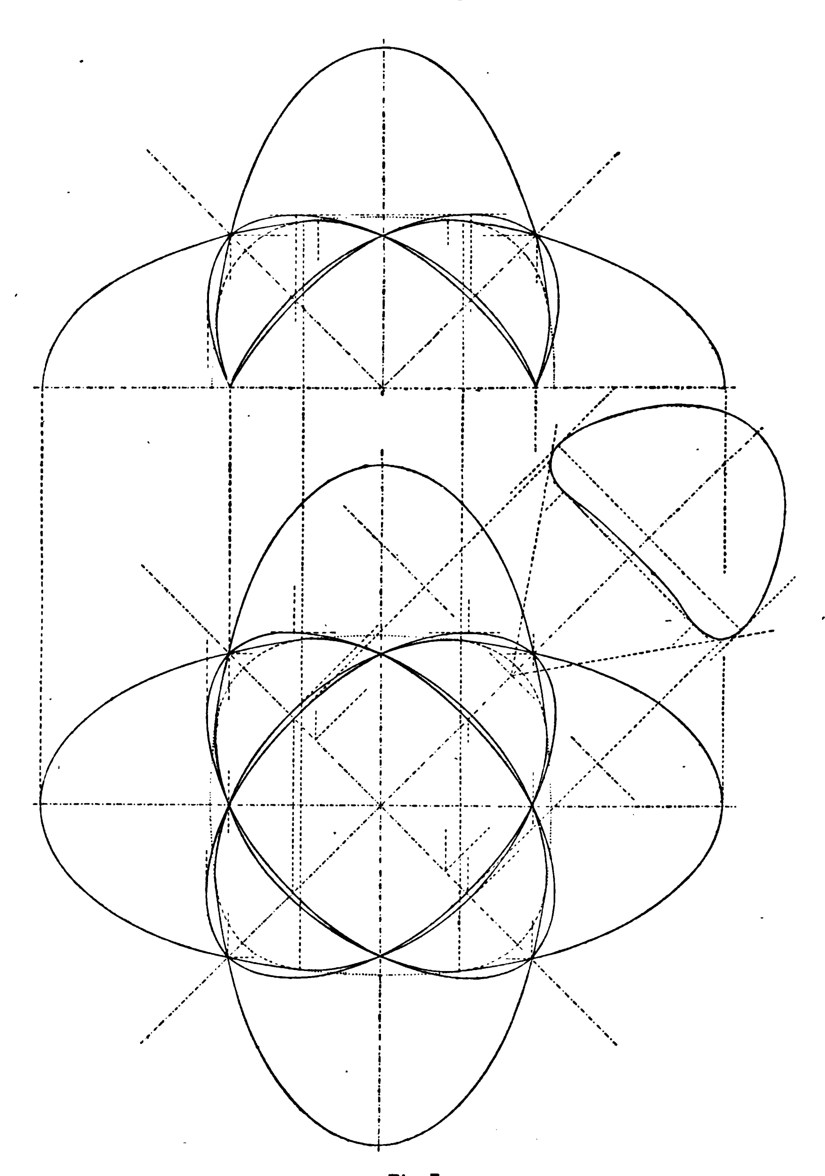


Fig. 7.

tré. Imaginons le cube directeur et une des six surfaces pyramidales ayant pour sommet commun le centre du cube, pour directrices les carrés inscrits aux faces du cube. Les côtés d'un carré sont les cordes de quatre arcs de cercle de 60° situés dans les faces de la pyramide au delà de la directrice de celle-ci par rapport à son sommet. Dans la pyramide, il existe une nappe finie de surface courbe, tangente à ses faces le long des quatre arcs de cercle, ayant deux sommets sur son axe, présentant une partie concave autour de son sommet le plus rapproché de celui de la pyramide, s'appuyant sur les milieux des côtés de la face du cube par quatre points singuliers où le plan tangent à la surface est indéterminé. Aux six pyramides sont inscrites six nappes égales à celle que nous venons de décrire et disposées de la même manière par rapport aux faces du cube directeur, réunies deux à deux par leurs points singuliers. Par suite, la surface est formée de six nappes finies égales, extérieures à un cube, réunies par douze points situés aux milieux des arêtes du cube, ces points étant singuliers; elle a douze sommets de première espèce; elle est tangente selon quatre circonférences aux quatre plans perpendiculaires aux diagonales du cube, en son centre; enfin elle est coupée, selon six ellipses égales, par les trois plans perpendiculaires aux arêtes du cube en leurs milieux; et, selon douze ellipses égales, par six plans quadritangents à la surface et formant un cube homothétique au cube précédent.

VARIÉTÉS

CINÉMATIQUE A DEUX ET A TROIS DIMENSIONS

Par M. **Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

1. — Nous profitons de la gracieuse hospitalité qui nous est accordée dans ce *Journal*, pour donner à ses lecteurs une idée de notre mémoire de Cinématique à deux et à trois dimen-

sions qui va paraître dans le *Bulletin de la Société des sciences de Nancy* (*).

La Cinématique ordinaire, que nous appellerons ici *Cinématique à une dimension* peut, comme l'on sait, se définir ainsi :

Soit OT $= t$ une variable t, comptée sur une ligne droite, à partir d'une origine fixe O, et représentant la mesure ordinaire du temps.

Soit un point M, mobile par rapport à des axes de coordonnées, en même temps que le point T, sur la droite OT. Cette dépendance des mouvements des deux points considérés peut s'exprimer par trois équations :

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t);$$

x, y, z étant les coordonnées du point M.

Quand le point T décrit le chemin dt, le point M décrit, sur sa courbe, ou trajectoire, l'élément ds; la dérivée $\frac{ds}{dt}$, portée sur la tangente à la courbe, est la vitesse du point M.

L'étude des courbes engendrées par un point M, qui se meut dans ces conditions, et l'étude des grandeurs qui, comme la vitesse, se rattachent aux courbes ainsi décrites, est précisément l'objet de la Cinématique ordinaire.

Supposons maintenant que le point T se déplace non plus sur une ligne droite, mais dans un plan. Soient α, β, ses coordonnées.

Nous pouvons lier le point M(x,y,z) au point T par les trois équations

$$x = f_1(\alpha,\beta) \qquad y = f_2(\alpha,\beta) \qquad z = f_3(\alpha,\beta).$$

L'étude des déplacements de M dépendant ainsi des deux variables α, β, constitue la *cinématique à deux dimensions.*

Enfin, si le point T est déterminé par trois coordonnées α, β, γ, dans un espace à trois dimensions; le mouvement du point M, par rapport au mouvement de T, sera défini par trois équations :

$$x = f_1(\alpha,\beta,\gamma), \qquad y = f_2(\alpha,\beta,\gamma), \qquad z = f_3(\alpha,\beta,\gamma).$$

On obtient ainsi la *cinématique à trois dimensions.*

Quand le point T décrit le chemin dt, le point M décrit le

(*) Berger-Levrault et Cie, imprimeurs à Nancy.

chemin ds, et la dérivée $\frac{ds}{dt}$, dirigée suivant la trajectoire de M, est la vitesse de M. C'est la définition de la Cinématique ordinaire.

2. — Étudions, d'après cela, les mouvements infiniment petits d'un point mobile dans un plan, à partir d'une position initiale M_0, le point T se déplaçant lui-même à partir de sa position correspondante T_0, dans un plan. Cette correspondance peut s'exprimer par les équations :

(1) $$x = f_1(\alpha,\beta), \qquad y = f_2(\alpha,\beta).$$

Les déplacements infiniment petits vérifieront les relations

(2) $$dx = p_1 d\alpha + q_1 d\beta; \qquad dy = p_2 d\alpha + q_2 d\beta,$$

p_1, q_1 et p_2, q_2 étant les valeurs des dérivées partielles aux points correspondants M_0 et T_0.

Les équations (2), linéaires et homogènes en dx, dy, $d\alpha$ et $d\beta$, montrent que les points M, T, dans leurs déplacements infiniment petits, décrivent des figures homographiques. Il s'agit ici de l'homographie particulière qui conserve le parallélisme et les rapports de grandeur des segments de droites parallèles. (En parlant de parallélisme, nous supposons, bien entendu, qu'on étende les formules (2) à des figures finies).

Cela posé, entourons le point T_0, d'un cercle de rayon dt. A ce cercle, correspond, pour le point M, une figure homographique, c'est-à-dire une ellipse de centre M_0. Quand le point T décrit le rayon $T_0T = dt$, du cercle ; le point M décrit le rayon correspondant $M_0M = ds$, de l'ellipse homographique. La vitesse v, de ce déplacement, est $\frac{ds}{dt}$. Pour tous les rayons T_0T du cercle, dt est une constante. La formule $v = \frac{ds}{dt}$, prouve que l'extrémité de la vitesse v dirigée suivant ds, décrit une courbe finie, homothétique à l'ellipse parcourue par l'extrémité de ds. Donc, le lieu de l'extrémité de la vitesse v est une ellipse, homographique au cercle de rayon dt.

C'est ce que nous appellerons l'*ellipse des vitesses*.

A deux diamètres perpendiculaires du cercle, correspondent deux diamètres conjugués de l'ellipse des vitesses ; on a ainsi deux vitesses conjuguées. Les axes de l'ellipse sont les deux

seules vitesses conjuguées perpendiculaires; ces axes montrent qu'il passe en M_0 deux trajectoires orthogonales, correspondant à deux trajectoires orthogonales passant par T_0. Il y a ainsi, dans le plan de T, deux séries de trajectoires, également orthogonales.

3. — Une des propriétés de l'homographie dont nous nous occupons ici est que, dans deux plans homologues, le rapport de deux aires correspondantes est constant et égal au déterminant $\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$.

Si v_a et v_b sont les deux vitesses principales de M, c'est-à-dire les deux axes de l'ellipse des vitesses, on démontre aisément la formule $v_a v_b = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$.

Si nous considérons les deux aires planes, infiniment petites, décrites à la fois par M et T, comme des déplacements à deux dimensions, le rapport de ces deux déplacements est ce que nous appellerons la *vitesse à deux dimensions* du point M. Cette vitesse est donc égale à $v_a v_b$.

4. — Un cas particulier, digne d'être signalé, est celui où, au cercle décrit par T, correspond également un cercle décrit par M. Dans ce cas, l'ellipse des vitesses est aussi un cercle : l'homographie devient alors de la similitude. En ces positions particulières T_0, M_0, passent une infinité de trajectoires correspondantes, orthogonales.

Ce cas se présente, pour une position quelconque de T, lorsque les équations qui lient M à T sont celles de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

M. Lemoine nous adresse la lettre suivante :

En lisant votre intéressant article sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (*J. S.* 1884 p. 170) je vois que vous définissez cette courbe par les équations :

$$\frac{x}{R} = \frac{t^2(3 + t^2)}{(1 + t^2)^2},$$

$$\frac{y}{R} = \frac{2t^3}{(1 + t^2)^2}.$$

Puis, vous ajoutez :

« Il serait, croyons-nous, de peu d'intérêt d'expliquer ici comment nous sommes arrivé à ces formules. » Je suis d'un avis tout à fait contraire. La genèse des idées me semble de la plus haute importance, à moins d'en revenir au système des géomètres du XVIIe siècle qui se posaient des questions en cachant avec soin leurs méthodes et ce n'est certes ni notre avis, j'en suis sûr; ni, en tous cas, votre pratique.

Vos formules tombent du ciel, si l'on n'a pas le fil conducteur qui vous y a conduit et il n'y a que la mémoire en jeu, pour les retrouver.

Je ne vous dis que ces quelques mots car, je ne doute pas que vous ne développiez mieux que moi le thème « de l'avantage d'introduire partout la méthode analytique en exposant le résultat de recherches mathématiques. »

Je répondrai d'abord à M. Lemoine, que je suis, comme il le suppose, parfaitement d'accord avec lui sur l'opinion qu'il formule en terminant sa lettre. Si je ne développe pas, comme il semble m'y inviter amicalement, le thème en question, c'est que la chose est manifestement inutile; tout le monde étant d'accord sur ce point.

Quant à l'origine des formules qui ont servi de base au travail cité, voici ce que je puis dire, en me reportant à des souvenirs que je ne puis pourtant pas garantir, car ils sont, aujourd'hui, un peu effacés.

L'Hypocycloïde à trois rebroussements H_3, est une quartique possédant trois points doubles; elle est donc *unicursale*. Par suite, dans un système quelconque d'axes, les coordonnés d'un point, mobile sur la courbe, s'expriment par des formules unicursales.

C'est ainsi qu'en considérant H_3 comme engendré par un point déterminé M, d'un cercle roulant tangentiellement à l'intérieur d'un autre cercle de rayon trois fois plus grand, on exprime les coordonnées de M par des formules unicursales qu'on identificra sans difficultés avec celles que nous avons données *(loc. cit.)*, pourvu qu'on se place dans le système d'axes qui est indiqué.

En fait, ces formules qu'on peut retrouver de cent façons diverses (et c'est pour ce motif que l'indication de leur origine nous avait paru dénuée d'intérêt) se sont présentées à nous en cherchant *l'enveloppe des axes des paraboles qui sont tangentes à l'origine à l'axe* ox *et dont les directrices enveloppent une parabole d'axe* ox, *ayant* oy *pour tangente au sommet*. (axes rectangulaires).

On trouve, de même, pour représenter H_3, les formules

$$\frac{x}{p} = \frac{2t}{(t^2+1)^2}, \qquad \frac{y}{p} = \frac{t^2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}.$$

L'axe ox est la tangente à l'un des sommets de H_3 ; oy est la tangente au point de rebroussement correspondant. On obtient directement ces formules en cherchant *l'enveloppe des axes des paraboles tangentes à* ox *et telles que la directrice coupe* oy *en un point fixe.* G. L.

EXERCICE

Par M. **A. Boutin.**

Des sommets d'un triangle, comme centres, on décrit des cercles dont les rayons sont respectivement p, q, r. *Déterminer, dans le plan du triangle, les points d'où ces cercles sont vus sous le même angle et calculer les distances de ces points aux côtés.*

Prenons comme axes, le côté BC, et la perpendiculaire à ce côté, menée par B. On sait que le lieu des points, d'où deux cercles sont vus sous le même angle, est la circonférence qui a pour diamètre la distance de leurs centres de similitude. Les points cherchés sont donc au nombre de deux et situés aux intersections de deux cercles connus.

Soient x, y les coordonnés d'un de ces points. On trouve :

Coordonnées du centre du cercle dont le centre est sur BC :

$$\frac{aq^2}{q^2-r^2}, \qquad 0.$$

Coordonnées du centre du cercle dont le centre est sur AB :

$$\frac{cq^2\cos B}{q^2-p^2}, \quad \frac{cq^2\sin B}{q^2-p^2}.$$

Rayons respectifs de ces cercles :

$$\frac{aqr}{q^2-r^2}, \quad \frac{cqp}{q^2-p^2}.$$

Équations de ces cercles :

$$\left(x - \frac{aq^2}{q^2-r^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2q^2r^2}{(q^2-r^2)^2},$$

$$\left(x - \frac{cq^2\cos B}{q^2-p^2}\right)^2 + \left(y - \frac{cq^2\sin B}{q^2-p^2}\right)^2 = \frac{c^2q^2p^2}{(q^2-p^2)^2};$$

ou

$$(1)\qquad x^2 + y^2 - 2ax\frac{q^2}{q^2 - r^2} + \frac{a^2q^2}{q^2 - r^2} = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2cx\frac{q^2\cos B}{q^2 - r^2} - 2cy\frac{q^2\sin B}{q^2 - p^2} + \frac{c^2q^2}{q^2 - p^2} = 0.$$

Enfin, l'axe radical est représenté par l'équation :

$$(2)\qquad 2x[a(q^2 - p^2) - c\cos B(q^2 - r^2)] - 2cy\sin B(q^2 - r^2)$$
$$+ c^2(q^2 - r^2) - a^2(q^2 - p^2) = 0.$$

La distance y d'un point cherché, au côté BC, s'obtient en éliminant x entre (1) et (2). On trouve, après des calculs assez longs, l'équation :

$$y^2[a^2(q^2-p^2)(r^2-p^2)+b^2(p^2-q^2)(r^2-q^2)+c^2(q^2-r^2)(p^2-r^2)]+$$
$$+cy\sin B\left[a^2\{q^2(r^2-p^2)+r^2(q^2-p^2)\}+b^2q^2(q^2-r^2)+c^2r^2(r^2-q^2)\right]$$
$$+\frac{1}{4}\Big[a^4(p^4-q^2r^2)+b^4q^2(q^2-r^2)+c^4r^2(r^2-q^2)+2a^2b^2q^2(r^2-p^2)$$
$$+2a^2c^2r^2(q^2-p^2)\Big]=0.$$

On aurait des équations analogues pour déterminer les distances des mêmes points aux deux autres côtés du triangle.

Si $p = q = r$, l'équation précédente s'abaisse au premier degré, et donne $y = R\cos A$. Le point correspondant est le centre du cercle circonscrit ; ce qu'on pouvait voir *a priori.*

EXERCICE ÉCRIT

26. — Soit yOx un angle droit. On trace deux droites mobiles Oz, Oz', symétriques par rapport à la bissectrice de yOx, et de deux points fixes, A, B, situés respectivement sur Ox, Oy, on abaisse, sur Oz, Oz', des perpendiculaires AR, AR'.

Les parallèles aux axes, menées par ces points R, R', forment un rectangle RSR'T.

Cela posé :

1° Démontrer que l'hyperbole équilatère, circonscrite au rectangle RSR'T, passe par O.

2° Trouver le lieu du centre de cette hyperbole.

Ce lieu est une ellipse. On déterminera le centre de cette ellipse, et ses axes en grandeur et en position.

3° Soit Γ le cercle circonscrit à OST.

Trouver le lieu décrit par le centre de Γ.

4° Quelle est l'enveloppe de Γ? *(G. L.)*

Solution de l'exercice 25 et notes diverses par l'auteur.

Les équations des ellipses (BC), (AC), (AB), sont:

(BC) $\alpha^2 - \beta\gamma = 0$, (AC) $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, (AB) $\gamma^2 - \alpha\beta = 0$.

ou

$$a^2x^2 - bcyz = 0, \qquad b^2y^2 - acxz = 0, \qquad c^2z^2 - abxy = 0.$$

De plus, l'équation du cercle circonscrit est

$$(\Gamma) \qquad a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0.$$

Des équations (BC), (Γ), on déduit,

$$a^2\alpha^2 + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = \alpha(a^2\alpha + c^2\beta + b^2\gamma) = 0.$$

Celle-ci représente deux droites; l'une est le côté BC. L'autre, celle qui correspond à

$$(D) \qquad a^2\alpha + b^2\gamma + c^2\beta = 0,$$

est vérifiée par $\alpha = 0$, et $b^2\gamma + c^2\beta = 0$.

Cette dernière équation représente la tangente Δ_a, au point A, au cercle circonscrit. On sait que les droites Δ_a, Δ_b, Δ_c rencontrent les côtés opposés en trois points situés sur une droite, polaire du point de Lemoine, par rapport au cercle circonscrit, et que l'on appelle *droite de Lemoine.*

Ainsi, les droites qui, associées aux côtés BC, AC, AB, forment un couple de sécantes communes au cercle circonscrit et aux ellipses (BC), (AC), (AB); forment un triangle homologique au triangle ABC; l'axe de cette homologie est la droite de Lemoine.

α, β, γ, représentent les coordonnées barycentriques; x, y, z, les coordonnées normales d'un point M par rapport au triangle ABC; de telle sorte que

$$2\alpha = ax, \qquad 2\beta = by, \qquad 2\gamma = cz.$$

2° Soient: $A'(\alpha_1, \beta_1 \gamma_1)$, $B'(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $C'(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, trois points pris respectivement sur (BC), (AC), (AB). Les équations des droites AA', BB', CC' sont

$$\gamma_1\beta - \beta_1\gamma = 0,$$
$$\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha = 0,$$
$$\beta_3\alpha - \alpha_3\beta = 0.$$

Pour qu'elles concourent il faut que :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \gamma_1 & -\beta_1 \\ -\gamma_2 & 0 & \alpha_2 \\ \beta_3 & -\alpha_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La tangente en A', à (BC), qui correspond à l'équation

$$2\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0,$$

rencontre le côté BC au point représenté par :

$$\alpha = 0, \qquad \frac{\beta}{\gamma_1} = \frac{\gamma}{-\beta_1}.$$

Les coordonnées des points analogues sont:

$$\beta = 0, \quad \frac{\alpha}{-\gamma_2} = \frac{\gamma}{\alpha_2}; \qquad \gamma = 0, \quad \frac{\alpha}{\beta_3} = \frac{\beta}{-\alpha_3};$$

et la condition qui exprime que ces points sont en ligne droite est identique à (A).

Remarque. — Les ellipses (BC), (AC), (AB) jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables.

Tout d'abord, l'on peut observer qu'elles sont anallagmatiques dans la méthode de transformation par points réciproques, et correspondent, à ce point de vue, aux paraboles tangentes à deux côtés du triangle aux extrémités du troisième, lesquelles sont anallagmatiques dans la transformation par transversales réciproques. (G. de Longchamps, Géométrie de la Règle, *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885, p. 231.)

Les coordonnées d'un point de l'ellipse (BC) se mettent sous la forme

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\gamma}{\lambda}.$$

Les coordonnées du point réciproque sont :

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\lambda}}.$$

Et l'équation de la droite qui joint deux points réciproques est :

$$\beta - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\alpha + \gamma = 0.$$

La droite correspondante est parallèle au côté BC.

On en conclut que deux points réciproques, situés sur (BC), sont en même temps isobariques, et que les ellipses considérées sont aussi des anallagmatiques dans cette méthode de transformation ; ce que l'on peut vérifier directement.

Les centres des ellipses (BC), (AC), (AB) s'obtiennent en prolongeant les médianes correspondantes d'une longueur égale au tiers de leur longueur. Ils forment un triangle, inscrit à l'ellipse de Steiner, triangle égal et homothétique à ABC; le centre d'homothétie étant le centre de gravité de ABC.

Si, par le centre de (BC), nous menons des parallèles aux côtés du triangle et aux médianes correspondantes, nous obtenons trois couples de diamètres conjugués ; c'est-à-dire, trois couples de droites en involution. On peut déduire, de là, la construction des axes de (BC), lesquels correspondent au couple des rayons rectangulaires, appartenant au faisceau involutif considéré. Pour déterminer ce couple, traçons un cercle quelconque passant par le centre du faisceau ; puis prenons l'intersection des cordes déterminées dans le cercle par les différents couples de rayons du faisceau, et joignons ce point au centre du cercle. Les rayons correspondants sont les axes de la conique.

Au moyen de cette construction, on pourrait vérifier que les axes des trois coniques sont parallèles ; mais on observera que la figure formée par les trois ellipses et le triangle ABC, pouvant être considérée comme constituée par la projection d'un triangle équilatéral et des trois cercles tangents à deux côtés, aux extrémités du troisième, les trois ellipses sont égales et ont leurs axes parallèles (*Journal de Math. spéc.*, 1885, page 131, note II).

Les ellipses (BC), (AC), AB admettent, deux à deux, comme tangentes communes, les côtés du triangle ABC. Elles admettent en outre, deux à deux, trois autres tangentes communes, parallèles aux côtés du triangle ABC.

En terminant, nous signalerons un autre groupe de trois coniques remarquables du plan d'un triangle, lesquelles, associées aux ellipses dont il vient d'être question, jouissent de propriétés intéressantes. Ce sont les hyperboles tangentes à deux côtés du triangle aux extrémités du troisième, et dont le centre coïncide avec le centre de gravité.

QUESTIONS RÉSOLUES

4. — *On donne trois droites* Δ, Δ', Δ'', *non parallèles à un même plan. Trouver : 1° le centre de l'hyperboloïde* H *qui passe par les trois droites, 2° les conditions pour qu'il soit de révolution.*

1° On sait que le centre de H, coïncide avec le centre O du parallélipipède de Binet, correspondant aux droites données, et construit par le procédé connu.

2° On sait aussi qu'en prenant pour origine le point O, pour axes des parallèles aux arêtes du parallélipipède de Binet, l'équation de H, est

$$f = ayz + bzx + cxy + abc = 0,$$

$2a$, $2b$, $2c$ désignant les longueurs des arêtes de ce parallélipipède. Pour que H soit de révolution, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$U \equiv S(x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu) - 2f \equiv \textit{carré parfait}.$$

Le discriminant de la forme ternaire U est d'ailleurs.

$$\begin{vmatrix} S & S\cos\nu - c & S\cos\mu - b \\ S\cos\nu - c & S & S\cos\lambda - a \\ S\cos\mu - b & S\cos\lambda - a & S \end{vmatrix} = 0.$$

Tous ses mineurs doivent être nuls ; cette condition est nécessaire et suffisante. Écrivons donc

$$(1)\quad S^2 = (S\cos\nu - c)^2 = (S\cos\mu - b)^2 = (C\cos\lambda - a)^2.$$

$$(2)\quad S(S\cos\lambda - a) = (S\cos\mu - b)(S\cos\nu - c),$$

$$(3)\quad S(S\cos\mu - b) = (S\cos\nu - c)(S\cos\lambda - a),$$

$$(4)\quad S(S\cos\nu - c) = (S\cos\lambda - a)(S\cos\mu - b).$$

Des équations (1) on tire, d'abord,

$$(5)\qquad \pm S = S\cos\lambda - a.$$

Adoptons d'abord le signe +; les équations (3) et (4) donnent

$$S \cos \mu - b = S \cos \nu - c,$$

et le système considéré, dans l'hypothèse que nous avons faite, se réduit au suivant

$$S = S \cos \lambda - a, \qquad S \cos \mu - b = S \cos \nu - c,$$
$$S^2 = (S \cos \mu - b)^2.$$

Cette dernière égalité prouve que

$$\pm S = S \cos \mu - b.$$

On doit encore distinguer deux cas; car l'on peut prendre, successivement, le signe +, ou le signe —.

En adoptant la première hypothèse, on est conduit aux relations

$$\text{(A)} \qquad \frac{a}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{\mu}{2}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{\nu}{2}}.$$

De même, le signe — donne les conditions

$$\text{(B)} \qquad \frac{a}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} = \frac{b}{\cos^2 \frac{\mu}{2}} = \frac{c}{\cos^2 \frac{\nu}{2}}.$$

En revenant à l'équation (5), et en prenant le premier membre avec le signe —, on trouve

$$\text{(C)} \qquad \frac{a}{\cos^2 \frac{\lambda}{2}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{\mu}{2}} = \frac{c}{\cos^2 \frac{\nu}{2}},$$

ou

$$\text{(D)} \qquad \frac{a}{\cos^2 \frac{\lambda}{2}} = \frac{b}{\cos^2 \frac{\mu}{2}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{\nu}{2}}.$$

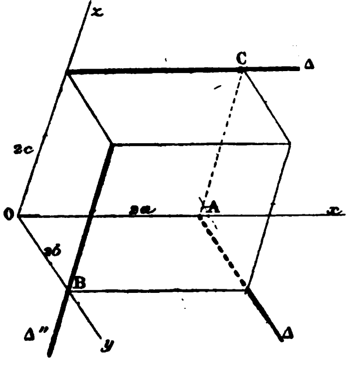
Ainsi, pour que H soit de révolution, il est nécessaire et suffisant que les éléments du parallélipipède de Binet, correspondant aux droites proposées, vérifient l'une ou l'autre des égalités (A), (B), (C), (D).

Remarque. — Ces relations sont susceptibles d'une interprétation géométrique.

Pour que les droites Δ, Δ', Δ'' soient trois génératrices d'un hyperboloïde de révolution, il est nécessaire que les perpen-

diculaires abaissées, sur ces droites, du centre du parallélipipède de Binet, soient égales et situées dans un même plan.

En exprimant qu'elles sont égales, on trouve l'une ou l'autre des relations (A), (B), (C), (D). On peut se demander alors si, l'une de ces relations étant accordée, on peut affirmer que les perpendiculaires considérées sont situées dans un même plan.



On vérifie ce fait de la manière suivante.

En cherchant d'abord la condition que doivent remplir les éléments :

$OA = 2a$, $OA = 2b$, $OC = 2c$; $y0x = \lambda$, $z0y = \mu$, $x0z = \nu$; du parallélipipède P, pour que les perpendiculaires abaissées du centre sur les arêtes Δ, Δ', Δ'' soient dans un même plan, un calcul facile donne

$$\begin{vmatrix} \frac{\cos\nu}{c} - \frac{\cos\mu}{b} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{\cos\lambda}{a} - \frac{\cos\nu}{c} & -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{\cos\mu}{b} - \frac{\cos\lambda}{a} \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas où les arêtes considérées sont les droites Δ, Δ', Δ'' de la figure, on doit prendre les formules (A) ; il reste alors à vérifier que

$$\begin{vmatrix} \frac{\cos\nu}{\sin^2\frac{\nu}{2}} - \frac{\cos\mu}{\sin^2\frac{\mu}{2}} & -\frac{1}{\sin^2\frac{\lambda}{2}} & \frac{1}{\sin^2\frac{\nu}{2}} \\ \frac{1}{\sin^2\frac{\lambda}{2}} & \frac{\cos\lambda}{\sin^2\frac{\lambda}{2}} - \frac{\cos\nu}{\sin^2\frac{\nu}{2}} & -\frac{1}{\sin^2\frac{\nu}{2}} \\ -\frac{1}{\sin^2\frac{\lambda}{2}} & \frac{1}{\sin^2\frac{\mu}{2}} & \frac{\cos\mu}{\sin^2\frac{\mu}{2}} - \frac{\cos\lambda}{\sin^2\frac{\lambda}{2}} \end{vmatrix} = 0.$$

Une transformation évidente ramène cette identité à la suivante :

$$\begin{vmatrix} \gamma - \beta & -\beta & \gamma \\ \alpha & \alpha - \gamma & -\gamma \\ -\alpha & \beta & \beta - \alpha \end{vmatrix} \equiv 0,$$

et celle-ci se vérifie sans difficulté.

BIBLIOGRAPHIE

Curso de Analyse infinitésimal, *calcul intégral* (première partie), par F. Gomes Teixeira, Directeur de l'Académie polytechnique de Porto (Typographia Occidental, 66, rua da Fabrica, Porto, 1889).

Cours d'Algèbre supérieure de l'Université de Gand, par P. Mansion, professeur ordinaire à la Faculté des sciences (Ad. Hoste, imprimeur libraire, 49, rue des Champs, Gand ; 1889).

Leçons d'Algèbre *à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales, etc.*, par E. Amigues, ancien élève de l'École normale supérieure, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Marseille et chargé d'un cours à la Faculté des sciences (Félix Alcan, 108, boulevard Saint-Germain, Paris. — Prix 10 francs).

Cours d'Algèbre *à l'usage des élèves de la classe des mathématiques spéciales, etc.*, par B. Niewenglowski, docteur ès sciences, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique (2 vol. in-8° jésus, chez Armand Collin et Cie, 1, 3, 5, rue de Mézières, Paris, 1889. — Prix 12 francs).

Nous ne pouvons que signaler ces ouvrages aux lecteurs du Journal; le temps nous faisant défaut pour en présenter une analyse en rapport avec leur valeur. Nous le regrettons vivement et nous aurions voulu, notamment, en faisant connaître toutes les qualités du livre de M. P. Mansion, nous acquitter, en partie, de la dette que nous avons contractée envers lui, quand il a fait, autrefois, et tout récemment encore, l'analyse de notre traité d'algèbre. *(G.L.)*

QUESTION 198

Solution par M. C. Lhébrard, élève de mathématiques spéciales au lycée de Montpellier.

Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, *et une droite* D, *on considère un angle mobile, dont le sommet décrit la droite* D *et dont les côtés* j *et* j′ *enveloppent respectivement des coniques* C *et* C′, *ayant le point* O *pour foyer et la droite* D *pour directrice.*

Démontrer que les droites Δ, *qui joignent les points d'intersection des droites* j *et* j′ *avec les axes* Ox, Oy, *enveloppent des coniques bitangentes aux coniques* C *et* C′.

Soit $z = 0$ l'équation de D; les coniques C, C′ sont représentées par les équations

$$x^2 + y^2 - e^2z^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - e'^2z^2 = 0,$$

Les droites j, j' ont pour équation, respectivement,

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - ez = 0, \quad x \cos \varphi' + y \sin \varphi' - e'z = 0;$$

et comme elles se coupent sur D, on doit avoir

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \varphi.$$

Cherchons l'équation de Δ; elle peut être représentée par l'une ou l'autre des égalités :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - ez + \theta y = 0,$$
$$x \cos \varphi' + y \sin \varphi' - e'z + \theta' x = 0.$$

Ces équations sont identiques, si l'on a :

$$\frac{\cos \varphi}{e} = \frac{\cos \varphi' + \theta'}{e'}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin \varphi + \theta}{e} = \frac{\sin \varphi'}{e'}.$$

Ainsi, l'équation de Δ est

$$x \frac{\cos \varphi}{e} + y \frac{\sin \varphi'}{e'} - z = 0,$$

ou, en tenant compte de (1),

$$x \frac{\cos \varphi}{e} \pm y \frac{\sin \varphi'}{e'} - z = 0.$$

L'enveloppe de Δ est donc une conique Γ, correspondant à l'équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e'^2} = z^2.$$

Nous avons pris, pour Δ, la droite qu'on obtient en joignant les points de rencontre des droites j, j' respectivement avec Ox, Oy. En considérant la droite Δ′ qui va du point commun à j et à Oy, au point de rencontre de j' avec Ox, on trouve, pour l'enveloppe de Δ′,

$$(3) \qquad \frac{x^2}{e'^2} + \frac{y^2}{e^2} = z^2.$$

Les équations (2) et (3) représentent, comme on le voit, des coniques doublement tangentes à chacune des coniques proposées C, C′; les cordes de contact sont les axes ox, oy.

NOTA. — Solutions analogues par MM. Clapier, au lycée de Montpellier; Paul Bourgarel, à Antibes. Solutions géométriques par M. Roux, élève au lycée de Grenoble. Solution par la considération des coordonnées tangentielles, par M. A. Lévy, élève au lycée de Nancy (classe de M. Hervieux). Solution géométrique et analytique par M. Destiker, élève au lycée de Douai.

M. Leinekugel, élève au lycée Charlemagne, généralise la proposition en question et démontre le théorème suivant:

Étant données deux coniques E, E′ *bitangentes, on considère un angle mobile dont le sommet décrit la corde des contacts et dont les côtés* j, j′, *enveloppent les coniques* C, C′; *montrer que les droites qui joignent les points d'intersection des côtés* j *et* j′, *avec deux droites fixes* Δ, Δ′, *passant par le point de concours des tangentes communes à* C, C′ *enveloppent des coniques bitangentes à* C, C′.

Il observe aussi que la question proposée peut encore se déduire de cette proposition relative aux circonférences :

Étant donnés un point fixe P *et une droite fixe* D, *on considère deux circonférences* C *et* C′ *tels que* P *soit le pôle de la droite* D *par rapport aux deux circonférences* C, C′, *et, par ce point* P *on mène une droite mobile* Δ. *Aux points de rencontre de* Δ *avec* C, *on mène des parallèles* j, j_1 *à une direction fixe; de même, par les points communs à* Δ *et à* C′ *on mène des parallèles* j′, j'_1 *à une seconde direction fixe; le lieu du point d'intersection de deux de ces droites* j, j′ *décrit une conique bitangente aux cercles* C *et* C′.

En transformant par polaires réciproques cette proposition, P étant le centre du cercle qui constitue la figure de référence, on trouve l'énoncé de la question proposée, l'angle *yox* étant quelconque.

On pouvait enfin, comme l'observe encore M. Leinekugel, démontrer la proposition corrélative ; le calcul est tout aussi simple.

QUESTIONS PROPOSÉES

273. — THÉORÈME I. — On donne un point P, une droite A′B′, et une conique Σ. Une transversale, tournant autour du point P, coupe la droite en un point Q, et la conique en deux

points R, R′. Si l'on prend les points doubles de l'involution déterminée sur la transversale par les deux couples de points P, Q et R, R′, le lieu de ces points doubles est une conique Σ′.

THÉORÈME II. — On donne une droite, une conique Γ et deux divisions homographiques sur cette conique.

Les tangentes à la conique, en deux points homologues A, A′, rencontrent la droite en deux points; les droites qui joignent ces deux derniers points au pôle de la droite des points doubles, coupent la corde AA′ en des points dont le lieu est une conique.

Quand la droite donnée est tangente à Γ, le lieu est un système de deux droites. *(Tarry.)*

274. — M et M′ sont deux points qui, dans le plan du triangle ABC, ont pour coordonnées tripolaires respectivement m, n, l et n, l, m; trouver le lieu de M et le lieu de M′.

(Em. Lemoine.)

275.—Un arc quelconque, pris sur une hyperbole équilatère, est vu, de deux points diamétralement opposés sur la courbe, sous le même angle.

En déduire le théorème suivant, facile à vérifier directement :

Soient A, A′ deux points diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère H. Les circonférences passant par M tangentiellement à H et, respectivement, par les points A, A′, sont égales. *(G. L.)*

RECTIFICATIONS

P. 133, l. 25 : *au lieu de* $\lambda + \mu + \nu$, *lisez* $\lambda a + \mu b + \nu c$.

P. 171, l. 27 : *au lieu de* $\lambda'^2 - \lambda^2$, *lisez* $\lambda^2 - \lambda'^2$ *et ajoutez* $4SY = - \Sigma(\lambda^2 - \lambda'^2)a_x$.

P. 172, l. 31 : *au lieu de* au degré, lisez au-dessous du degré.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 22942-10-9.

SUR UN GROUPE DE CUBIQUES REMARQUABLES
DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. **Auguste Boutin.**

Quelques cubiques connues sont désignées sous des noms divers. Nous nous proposons, dans cette Note, d'indiquer, pour ces courbes, une dénomination uniforme, simple et caractéristique.

Problème I. — *Par le point M, dont les coordonnées normales sont* x_1, y_1, z_1, *on fait passer une droite. Lieu des points inverses situés sur cette droite, quand elle pivote autour de* M.

Soit
$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$
l'équation d'une droite. Puisqu'elle passe par (x_1, y_1, z_1) et par l'inverse de (x, y, z) on a aussi :
$$\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1 = 0,$$
$$\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{y} + \frac{\nu}{z} = 0.$$
Le lieu cherché s'obtient en éliminant λ, μ, ν entre ces trois équations. On trouve :

(1) $\quad xx_1(y^2 - z^2) + yy_1(z^2 - x^2) + zz_1(x^2 - y^2) = 0;$

Le lieu correspondant est une cubique. Nous proposons de l'appeler : *Cubique des inverses, relative au point* M (x_1, y_1, z_1). Quand M sera un point remarquable du triangle (1), représentera aussi une cubique remarquable.

Les cubiques (1) jouissent de quelques propriétés générales.

Elles ont sept points communs (A, B, C, I, I', I'', I''').

La cubique (1) passe par les pieds des droites, AM, BM, CM.

Ces cubiques ont pour tangentes en A, B, C, I, I', I'', I''' et M, les droites : AM_2, BM_2, CM_2, IM, I'M, I''M, I'''M, MM_2 (M_2 désignant l'inverse de M).

Si M est l'un des points I, I' I''. I''', (1) se réduit à trois droites : les bissectrices intérieures ou une bissectrice intérieure et deux bissectrices extérieures.

Si M est le centre de gravité de ABC, la cubique représentée par

$$\Sigma \frac{x}{a}(y^2 - z^2) = 0,$$

est la cubique dite *des dix-sept points*. Cette cubique a été étudiée par M. Kœhler (J. S. 1886) et par M. Lemoine (Congrès d'Oran, 1888) (*).

Un groupe de cubiques, rentrant dans les précédentes, est constitué par le lieu des foyers des coniques tangentes aux côtés du triangle de référence et à une quatrième droite donnée. Voir : Mathieu *N. A. M.* 1865; et Salmon : *A treatise on conic sections*, 1869, 5e éd., pp. 263 et 265).

PROBLÈME II. — *Par le point* M *du plan d'un triangle, on fait passer une droite. On demande le lieu des points réciproques situés sur cette droite, quand elle pivote autour de* M.

Soient α_1, β_1, γ_1 les coordonnées barycentriques du point M. L'équation du lieu est :

$$(2) \quad \alpha\alpha_1(\beta^2 - \gamma^2) + \beta\beta_1(\gamma^2 - \alpha^2) + \gamma\gamma_1(\alpha^2 - \beta^2) = 0.$$

Cette équation représente une cubique que nous nous proposons d'appeler *Cubique des réciproques, relative au point* M (α_1, β_1, γ_1). Toutes les cubiques (2) ont sept points communs : 1° A, B, C, G; 2° les sommets A_1, B_1, C_1, du triangle anticomplémentaire de ABC.

Si M se confond avec l'un des points : G, A_1, B_1, C_1, la cubique se réduit à trois droites (trois médianes, ou une médiane et deux côtés du triangle anticomplémentaire).

Les cubiques (2) passent par les pieds des droites : AM, BM, CM.

Elles ont pour tangentes, en A, B, C, G, A_1, B_1, C_1, M, les droites : AM_0, BM_0, CM_0, GM, A_1M, B_1M, C_1M (M_0 désignant le réciproque de M).

PROBLÈME III. — *Soit, en coordonnées normales,*

$$(3) \quad A'x + B'y + C'z = 0,$$

l'équation d'une droite donnée Δ. *On demande le lieu des points inverses situés sur toutes les droites parallèles.*

(*) Nous devons ces renseignements bibliographiques, et tous ceux qui figurent dans cette Note, à l'obligeance de M. E. Vigarié, que nous sommes heureux de remercier ici.

Soit Δ' une droite correspondant à l'équation

(4) $$Ax + By + Cz = 0,$$

On a : $$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} = 0.$$

En outre, puisque (Δ) et (Δ') sont parallèles :

$$A(bC' - cB') + B(cA' - aC') + C(aB' - bA') = 0;$$

d'où, pour l'équation du lieu :

(5) $$\Sigma x(y^2 - z^2(bC' - cB') = 0.$$

Ce lieu peut être appelé : *Cubique des inverses, relative à la direction* (3). D'ailleurs, ces cubiques rentrent dans celles du problème I. (5) est la cubique des inverses, relative au point ayant pour coordonnées :

$$x : y : z = bC' - cB' : cA' - aC' : aB' - bA'.$$

Ce point est l'associé à l'infini de celui dont les coordonnées barycentriques sont : $\frac{A'}{a}$, $\frac{B'}{b}$, $\frac{C'}{c}$.

Problème IV. — *Même question que* (III) *pour les points réciproques.*

Soit, en coordonnées barycentriques, la direction donnée :

(6) $$A'\alpha + B'\beta + C'\gamma = 0.$$

L'équation du lieu est :

$$\Sigma\alpha(\beta^2 - \gamma^2)(C' + B') = 0,$$

courbe que l'on peut appeler : *Cubique des réciproques, relative à la direction* (6).

Ces cubiques rentrent aussi dans celles du problème II, car ce sont les cubiques des réciproques relatives au point : $(\alpha : \beta : \gamma = C' - B' : A' - C' : B' - A')$, point associé à l'infini de celui dont les coordonnées barycentriquee sont $(A'. B', C')$.

Au triangle ABC, sont associées deux cubiques très remarquables, résultant du problème suivant :

Problème V. — *Lieu géométrique des points* P *tels qu'en les projetant orthogonalement en* A', B', C', *sur les côtés du triangle de référence, les droites* AA', BB', CC' *soient concourantes.*

Lieu géométrique du point de concours Q *de ces droites.*

On trouve pour le lieu de P, l'équation

(7) $$\Sigma(\cos A - \cos B \cos C)x(y^2 - z^2) = 0,$$

en coordonnées normales; et pour celui de Q, en coordonnées barycentriques :

(8) $$\Sigma \operatorname{cotg} A.\alpha(\beta^2 - \gamma^2) = 0.$$

Donc (7) est la cubique des inverses, relative à l'anticomplémentaire H' de l'orthocentre H; et (8) est la cubique des réciproques, relative au réciproque H_0 de l'orthocentre.

Ces cubiques ont été étudiées à diverses reprises par MM. Lucas, Dewulf, Darboux, Vigarié, Biny, etc.

M. Lucas, en 1876 (*N. A. M.* p. 240. Question 1207), avait proposé, sous une forme presque identique, le problème V. M. Dewulf (*N. A. M.* 1876, p. 550-555) a résolu géométriquement la question, sans donner les équations des cubiques.

La cubique (7) a été retrouvée (*J. S.* 1886, p. 186) dans une question proposée par M. Darboux et résolue par M. Vigarié :

On circonscrit à un triangle quelconque une conique telle que les normales aux trois sommets passent par un même point. Lieu de ce point. Lieu du pied de la quatrième normale.

Cette cubique est encore le lieu d'un point P tel que les perpendiculaires menées aux droites PA, PB, PC, par les sommets A, B, C, rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite (Gerono).

C'est aussi le point de concours des normales aux coniques inscrites au triangle ABC, et telles que les normales, aux points de contact, soient concourantes (Kœlher).

La cubique (7) a pour centre O; pour tangente, en O, le diamètre de Brocard (OK). Les asymptotes sont les médiatrices du triangle. Elle passe par les points : A, B, C, I, I', I'', I''', H, O, les pieds de AH', BH', CH', etc. et par les symétriques de tous les points précédents relativement au point O.

La cubique (8) passe par A, B, C, G, A_1, B_1, C_1, H, H_0, ν, ν_a, ν_b, ν_c, Γ, Γ_a, Γ_b, Γ_c; par les pieds de AH_0, BH_0, CH_0, etc.

Nous ferons observer, en terminant, que la cubique des réciproques, relative à un point, se déduit de la cubique des inverses par la *transformation homographique instantanée* que M. de Longchamps a fait connaître au Congrès de Nancy, en 1886, dans une Note intitulée : *Sur une conique remarquable du plan d'un triangle.*

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Balitrand**, élève au Lycée de Nîmes (*).

Les études si intéressantes, publiées récemment dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, sur les hypocycloïdes à trois et à quatre retroussements, nous ont donné l'idée de chercher les équations tangentielles de ces courbes et de leur appliquer le principe de dualité. Leurs transformées sont des courbes qui ont déjà été rencontrées et étudiées à d'autres points de vue. Les propriétés des hypocycloïdes fournissent des propriétés corrélatives fort élégantes, dont certaines présenteraient quelques difficultés à être démontrées directement.

Hypocycloïde à trois rebroussements. — Un des modes de génération les plus simples de l'hypocycloïde à trois rebroussements H_3, considérée comme enveloppe de droite, est certainement le suivant.

Soient : ω un cercle fixe, Ox un diamètre, Oy la tangente à l'extrémité de ce diamètre, M un point pris sur le cercle; la droite Δ qui, passant par M, fait, avec Ox un angle égal à MOx, enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. Le point de contact de la droite avec son enveloppe, s'obtient en projetant, sur Δ, l'extrémité du rayon ωM prolongé d'une longueur double. ω est le cercle inscrit, O un sommet, Ox une tangente de rebroussement.

Cela posé $$x^2 + y^2 - 2Rx = 0,$$
étant l'équation du cercle ω, et
$$ux + vy - 1 = 0,$$
celle d'une droite quelconque; si l'on exprime que le milieu de cette droite est sur le cercle ω, on obtient la relation
$$4Rv^2u - (u^2 + v^2) = 0.$$

C'est l'équation tangentielle de l'hypocycloïde H_3.

La transformée, par voie de dualité, a pour équation
$$4y^2x - R(x^2 + y^2) = 0.$$

(*) Aujourd'hui, élève à l'École polytechnique.

On peut encore dire que cette courbe est la polaire réciproque de H_3 par rapport au cercle représenté par

$$x^2 + y^2 - R^2 = o.$$

Elle a déjà été rencontrée par M. de Longchamps, qui en a indiqué plusieurs modes de génération, et qui a proposé de l'appeler *cubique mixte*. (*Journ. de Math. spéc.*, 1886, p. 245.)

Transformons maintenant quelques propriétés de H_3.

D'un point P pris sur la cubique mixte, on peut, (abstraction faite de la tangente en P) mener deux autres tangentes à la courbe :	Toute tangente à l'hypocycloïde, la rencontre (abstraction faite du point de contact) en deux points M_1 et M_2 :
Les points de contact sont vus, du point double, sous un angle droit.	Les tangentes en ces points sont rectangulaires.
La corde des contacts enveloppe une parabole ayant pour foyer le point double, pour axe OX, et bi-tangente à la cubique.	Elles se coupent, en M, sur le cercle inscrit à H_3.
Le troisième point de rencontre de cette droite et de la cubique, et le point d'où l'on mène les tangentes, sont vus, du point double, sous un angle droit.	La troisième tangente à la courbe, issue de M et la droite M_1M_2 sont rectangulaires.
Sur une tangente d'inflexion on prend un point variable. On mène les deux tangentes à la cubique, issues de ce point ; la corde des contacts enveloppe une conique qui touche les deux autres tangentes d'inflexion aux points d'inflexion. (Une des tangentes d'inflexion est l'asymptote de la courbe.)	Par un point de rebroussement, on mène une droite variable qui rencontre H_3 aux points A, B. Le point de concours des tangentes, en A et B, décrit une conique qui passe par les deux autres points de rebroussement et y touche les tangentes de rebroussement.

Nous allons montrer enfin que l'on peut, au moyen de l'équation tangentielle, démontrer simplement quelques propriétés de l'hypocycloïde H_3. A cet effet, désignons par $\lambda \cos \varphi$ $\lambda \sin \varphi$ les coordonnées d'un point quelconque P du plan. Soit

$$y - \lambda \sin \varphi - m(x - \lambda \cos \varphi) = o,$$

l'équation d'une droite issue de ce point. Si l'on exprime que les coordonnées à l'origine de cette droite

$$u = \frac{m}{\lambda(m \cos \varphi - \sin \varphi)} \qquad v = \frac{-1}{\lambda(m \cos \varphi - \sin \varphi)}.$$

satisfait à l'équation tangentielle de l'hypocycloïde H_3

$$4Rv^2u - (u^2 + v^2) = o,$$

on obtient

$$\frac{4Rm}{\lambda^3(m \cos \varphi - \sin \varphi)^3} - \frac{m^2 + 1}{\lambda^2(m \cos \varphi - \sin \varphi)^2} = o,$$

ou bien

$$m^3\lambda \cos \varphi - m^2\lambda \sin \varphi - (4R - \lambda \cos \varphi)m - \lambda \sin \varphi = o,$$

équation qui donne les coefficients angulaires des tangentes à la courbe, issues de P.

Il existe donc, entre les coefficients angulaires de ces tangentes, les relations

$$m_1 + m_2 + m_3 = m_1m_2m_3 = \operatorname{tg} \varphi.$$

Ainsi : 1° les trois tangentes que, par un point, on peut mener à l'hypocycloïde, font, avec une quelconque des tangentes de rebroussement, des angles dont la somme est un multiple de π :

2° le produit des tangentes de ces trois angles est égal à la tangente de l'angle que fait, avec une quelconque des tangentes de rebroussement, la droite qui joint le point P au sommet correspondant.

Hypocycloïde à quatre rebroussements. — L'hypocycloïde à quatre rebroussements étant considérée comme l'enveloppe d'une droite de longueur constante 2R, dont les extrémités glissent sur deux axes rectangulaires; on arrive facilement à son équation tangentielle :

$$4R^2u^2v^2 - (u^2 + v^2) = o.$$

La *Kreuzcurve*, représentée par

$$4x^2y^2 - R^2(x^2 + y^2) = o,$$

est donc, soit la transformée par voie de dualité de l'hypocycloïde, soit sa polaire réciproque par rapport au cercle dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Les propriétés suivantes, de la *Kreuzcurve*, découlent de cette méthode de transformation.

Une tangente variable, au cercle qui touche les asymptotes d'inflexion de la *Kreuzcurve*, rencontre la courbe en deux points réels. Le lieu du point de concours des tangentes en ces points est la *Kreuzcurve* elle-même.

Par tout point du cercle passant par les points de rebroussement de l'hypocycloïde, on peut mener, à cette courbe deux tangentes réelles. L'enveloppe de la droite qui joint les points de contact de ces tangentes est l'hypocycloïde elle-même.

Si l'on considère une tangente à la *Kreuzcurve*, puis une seconde tangente perpendiculaire à la première, les points de contact sont vus, de l'origine, sous un angle droit.

Si, autour du centre de la courbe on fait pivoter un angle droit BAC, dont les côtés rencontrent la courbe en A et en B, les tangentes en ces points sont rectangulaires.

L'équation tangentielle de l'hypocycloïde à quatre rebroussements pourrait servir à démontrer, pour cette courbe, les théorèmes analogues à ceux que nous avons démontrés pour l'hypocycloïde à trois rebroussements; mais nous ne nous arrêterons pas à cette recherche; et nous allons indiquer quelques propriétés de la *Kreuzcurve*.

Une tangente variable, à un cercle O, rencontre deux diamètres rectangulaires OX et OY, aux points A et B; les perpendiculaires en A et en B, à ces diamètres, se coupent au point M qui décrit la *Kreuzcurve* représentée par l'équation

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Le point M $\left(x = \frac{R}{\cos \varphi}, \quad y = \frac{R}{\sin \varphi}\right)$ est un point variable de la courbe; et l'on peut donner, du paramètre φ, une interprétation géométrique. C'est en effet l'angle que fait avec OX,

le rayon aboutissant au point de contact de la tangente variable avec le cercle O. L'emploi du paramètre φ est commode pour démontrer certaines propriétés de la *Kreuzcurve*. Nous allons en faire quelques applications.

La polaire du point M, par rapport au cercle correspondant à l'équation

$$x^2 + y^2 - R^2 = o,$$

est

$$\frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi} - R = o.$$

Elle enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements; ce qui prouve, d'une seconde manière, que la polaire réciproque d'une hypocycloïde est une kreuzcurve.

Les formules précédentes subsistent, avec des modifications évidentes, quand on remplace le cercle donné O par une ellipse. On trouve, dans ce cas, que la polaire d'un point de la kreuzcurve, par rapport à l'ellipse génératrice, enveloppe une développée d'ellipse, et que les normales, aux points où cette polaire coupe l'ellipse donnée, se rencontrent sur sa développée.

Les formules précédentes peuvent encore servir à trouver l'aire comprise entre les quatre branches de la kreuzcurve et leurs asymptotes. Transportons l'origine au point ($x = R$, $y = R$). L'expression des coordonnées d'un point de la courbe devient

$$X = \frac{R}{\cos\varphi} - R, \qquad Y = \frac{R}{\sin\varphi} - R.$$

On a d'ailleurs

$$du = YdX = \left(\frac{R}{\sin\varphi} - R\right)\frac{R\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{R^2}{\cos^2\varphi}\,d\varphi - \frac{R^2\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Par suite, en appelant φ_0 et φ_2, les valeurs de φ relatives aux abscisses x_0 et x_1; et en désignant par u l'aire comprise entre les ordonnées correspondantes, la courbe et l'asymptote :

$$u = R^2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - R^2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

ou

$$u = R^2(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_0) + R^2\left(\frac{1}{\cos\varphi_1} - \frac{1}{\cos\varphi_0}\right).$$

L'équation de la tangente à la kreuzcurve, au point M, se met facilement sous la forme

$$x\cos^3\varphi + \sin^3\varphi - R = o.$$

Au point M′, ce sera

$$x \cos^3 \varphi' + y \sin^3 \varphi' - R = 0.$$

La condition exprimant que ces deux droites sont rectangulaires, est la même que pour les droites

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi = 0,$$
$$x \cos \varphi' - y \sin \varphi' = 0,$$

qui joignent l'origine O au point M et M′. Ainsi :

Si un angle droit tourne autour du centre de la kreuzcurve, les tangentes, aux points où ses côtés rencontrent la courbe, sont rectangulaires.

Transformant par voie de dualité, on en déduit pour l'hypocycloïde le résultat suivant, qui complète un théorème énoncé par M. Rat dans son étude sur l'hypocycloïde. (*Journal de Math. spéciales*, 1887, p. 173.)

Les points de contact de deux tangentes rectangulaires, à l'hypocycloïde, sont vus, de l'origine, sous un angle droit.

Nous terminerons en donnant une démonstration géométrique d'une propriété bien connue des hypocycloïdes à trois et à quatre rebroussements; à savoir *que leurs développées sont des hypocycloïdes semblables.*

Hypocycloïde à trois rebroussements. — Reportons-nous à la génération de l'hypocycloïde à trois rebroussements, précédemment indiquée, et rappelons que (*) le rayon de courbure en un de ses points est égal à huit fois la distance du centre à la tangente correspondante.

Soient : D un point de la courbe, DAB, la normale en ce point, B le centre de courbure. La perpendiculaire, en B, au rayon DAB rencontre ωMA au point P tel que

$$\omega P = 9\omega M = 9R.$$

Décrivons le cercle de centre ω et le rayon 3R.

Traçons le cercle de diamètre AP (son rayon est 9R); soit C son centre. Puis, menons la droite ωQ, faisant avec OX un angle égal à $\frac{\pi}{3}$.

(*) Ce théorème a été donné par M. de Longchamps (*Journal*, 1884, p. 176).

Posons $BCP = \alpha$, $ABC = \beta$, $MOX = \gamma$.

Désignons enfin, par ω, l'angle POQ.

Dans le cercle ω, on a :

$$PQ = 9R\omega;$$

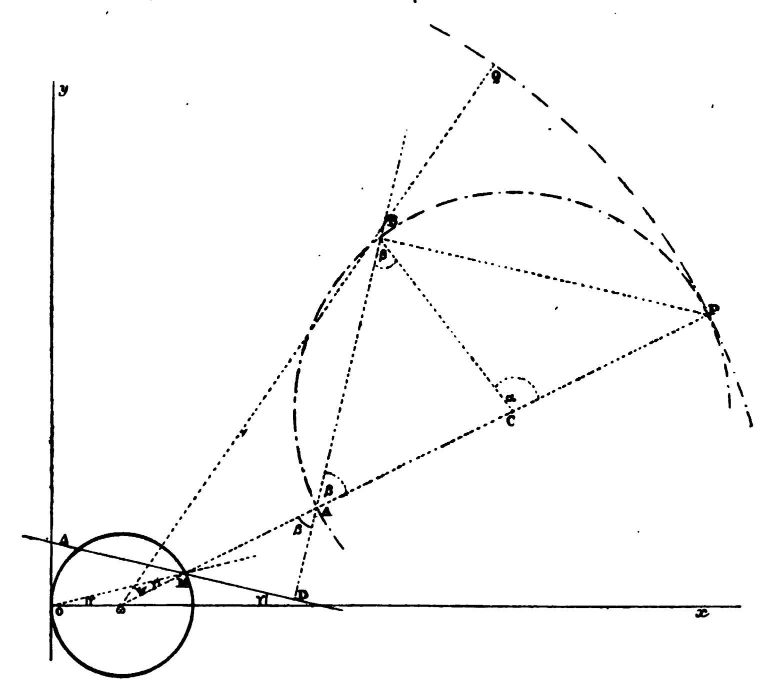
et, pour le cercle de centre C :

$$BP = 3R\alpha.$$

Nous allons montrer que

$$\alpha = 3\omega; \qquad \text{ou que} \qquad BP = PQ.$$

En effet, on a $\qquad \alpha = 2\beta.$



Puis, dans le triangle rectangle AMD,

$$\frac{\pi}{2} - \beta = \gamma + \frac{\pi}{\beta} - \omega,$$

égalité qui donne

(1) $$\gamma = \frac{\pi}{6} + \omega - \beta.$$

Enfin, dans le triangle OMω, on a :

(2)
$$\frac{\pi}{\beta} - \omega = 2\gamma;$$

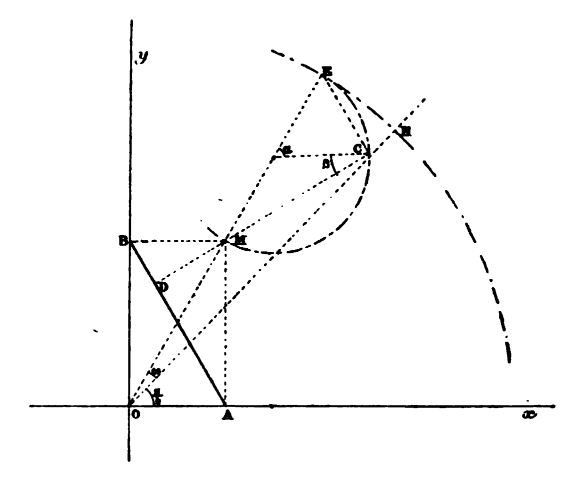
d'où
$$\gamma = \frac{\pi}{6} - \frac{\omega}{2}.$$

En portant dans (1), on a
$$\beta = \frac{3\omega}{2},$$

et, par suite,
$$\alpha = 3\omega.$$

On voit donc que le point B, entraîné dans le mouvement d'un cercle de rayon 3R, roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon 9R, décrit une hypocycloïde à trois rebroussements. Elle admet, pour sommets, les points de rebroussement de la proposée.

Hypocycloïde à quatre rebroussements. — Soient : AB une position de la droite mobile. M le centre instantané de rotation. Le centre de courbure C s'obtient en portant, à partir du point D (pied de la perpendiculaire abaissée de M sur AB), une longueur égale à 3MD.



La perpendiculaire en C à DMC rencontre OM en un point E tel que : OE = 2OM = 4R.

Traçons le cercle OE, puis le cercle de diamètre ME. Soit I son centre.

Enfin, menons la droite OH faisant, avec Ox, un angle égal à $\frac{\pi}{4}$.

On a dans le cercle O :

$$HE = 4R\omega;$$

en désignant par ω l'angle EOH.

Dans le cercle I, on a :

$$CE = R\alpha;$$

en désignant par α l'angle CIE.

Posant $$ICM = \beta,$$

on a : $$\alpha = 2\beta.$$

Puis, pour le triangle BMD :

$$2BMO = \frac{\pi}{2} + \beta.$$

D'ailleurs $$BMO = \omega + \frac{\pi}{2}.$$

Donc $$\beta = 2\omega,$$

$$\alpha = 4\omega.$$

De là, on conclut : $$CE = EH.$$

C. Q. F. D.

VARIÉTÉS

CINÉMATIQUE A DEUX ET A TROIS DIMENSIONS

Par M. **Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite* et *fin*, voir p. 249).

4. — Soient maintenant, dans un espace à trois dimensions :

(3) $x = f_1(\alpha,\beta,\gamma) \qquad y = f_2(\alpha,\beta,\gamma) \qquad z = f_3(\alpha,\beta,\gamma),$

ce qui donne pour les déplacements infiniment petits :

(4) $dx = p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma, \qquad dy = p_2 d\alpha + \dots$

$$dz = p_3 d\alpha + \dots$$

On déduit de là, sans difficulté, les conséquences suivantes :

Dans des déplacements infiniment petits, les points M et T décrivent à la fois des figures homographiques (homographie conservant le parallélisme).

Les vitesses du point M, pour toutes les trajectoires passant par la position M_0, sont les rayons d'un ellipsoïde de centre M^o.

Si l'on considère les déplacements infiniment petits de T sur une surface, les déplacements de M s'effectuent aussi sur une surface, et les vitesses de M pour ces déplacements, sont les rayons d'une ellipse, section plane de l'ellipsoïde des vitesses.

Si l'on considère le mouvement fini de T sur une surface, et le mouvement de M sur la surface correspondante, il y a, sur ces deux surfaces, deux séries de trajectoires orthogonales correspondantes. En chaque position de M, ces trajectoires sont tangentes aux axes de l'ellipse des vitesses, en ce point. Dans ce mouvement à deux dimensions, de M, la vitesse à *d d* est le rapport de deux aires infiniment petites décrites par T et par M; cette vitesse est dirigée selon le plan tangent à la surface trajectoire de M. Elle est égale au produit des deux axes de l'ellipse des vitesses.

La vitesse à trois dimensions, du point M, est le rapport des volumes infiniment petits décrits à la fois par M et par T: cette vitesse est égale au produit des trois axes principaux de l'ellipsoïde des vitesses; et, aussi au déterminant des neuf coefficients des équations (4).

5. — Lorsqu'on a un système de points quelconques en mouvement, deux points quelconques décrivent des figures infiniment petites, homographiques à la figure correspondante décrite par T. Ainsi les déplacements infiniment petits simultanés, de deux points, sont homographiques.

On verra dans notre Mémoire, la théorie détaillée du mouvement, à deux et à trois dimensions, d'un système quelconque de points, chacun de ces points ayant un coefficient positif ou négatif, analogue à ce qu'on appelle la masse en Mécanique.

Nous avons examiné également le cas où le coefficient de chaque mobile est lui-même une fonction des coordonnées du point T.

Lorsque les points en mouvement, au lieu d'être quelcon-

ques, conservent leurs distances mutuelles, ils forment des solides invariables; nous donnons, dans notre Mémoire, la théorie du déplacement, à deux et à trois dimensions, des solides : nous allons indiquer ici les cas les plus simples de cette théorie.

6. — Un plan P dépendant de trois paramètres, on peut lier le mouvement d'un plan au mouvement du point T (α, β, γ) mobile dans un espace à trois dimensions; il suffit pour cela que les trois paramètres de l'équation de ce plan soient des fonctions de α, β, γ. A chaque position de T correspond alors une position de P.

Si le point T reste sur une courbe, les trois coordonnées α, β, γ satisfont à deux relations, et l'équation du plan P ne contient plus qu'une variable indépendante. On sait qu'il enveloppe alors une surface réglée developpable; il touche cette surface suivant une génératrice rectiligne, *caractéristique* du plan.

Soit C, cette caractéristique; quand le point T décrit l'élément dt de sa trajectoire, le plan P tourne, autour de sa caractéristique C, d'un angle $d\theta$, le rapport $\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire du plan, vitesse que nous supposons dirigée suivant C.

Si le point T reste sur une surface, le plan a un mouvement à deux dimensions, c'est-à-dire que ce mouvement dépend de deux variables indépendantes. Le plan P enveloppe alors une surface qu'il touche en un seul point I. On tire, de là, les conséquences suivantes, que nous nous bornerons à énoncer :

A la position T_0 de T, sur sa surface, correspond la position P_0 du plan P; lequel touche, en I, sa surface enveloppe S. Si à partir de T_0, T décrit sur sa surface un élément de trajectoire dt, le plan P enveloppe un élément de surface développable et tourne autour de sa caractéristique C d'un angle $d\varphi$; la surface développable en question touche, en I, la surface S : ce point I est sur la caractéristique C. Portons la vitesse angulaire du plan $\frac{d\varphi}{dt}$, sur C, à partir du point I. Cette vitesse est le rayon d'une ellipse de centre I située, bien entendu, dans le

plan P_0. A deux déplacements rectangulaires du point T correspondent deux vitesses angulaires de P, lesquelles sont des rayons conjugués de cette ellipse.

Si le point T a un déplacement à trois dimensions; à trois déplacements infiniment petits suivant les arêtes d'un trièdre trirectangle correspondent, pour le plan, trois vitesses angulaires dirigées suivant trois caractéristiques; le triangle formé par ces trois caractéristiques est un triangle réciproque par rapport à une conique fixe imaginaire.

7. — Si à partir de sa position initiale T_0, le point T décrit un élément de trajectoire, le plan P_0 a, comme on sait, un de ses points dont la trajectoire est normale à P_0: c'est le foyer de ce plan. Il y a un foyer pour chaque trajectoire de T passant par T_0; si l'on prend ces trajectoires sur une même surface passant par T_0, le lieu du foyer est une droite que nous appellerons la droite focale; deux foyers, correspondant à deux trajectoires orthogonales de cette surface, forment une involution sur la droite focale.

Si l'on considère en T_0 trois surfaces orthogonales; à chacune de ces surfaces correspond, dans le plan P_0, une droite focale; le triangle formé par ces trois droites focales est réciproque par rapport à une ellipse imaginaire.

8. — Soit, dans un plan, une figure plane F, de forme fixe, qui s'y meut en fonction des coordonnées α et β du point T, mobile lui-même dans un plan.

Quand le point T décrit une courbe la position de la figure F ne dépend plus que d'une variable; c'est le cas ordinaire de la cinématique à une dimension. Le mouvement infiniment petit de F est alors une rotation autour d'un centre instantané. Si, à partir d'une position initiale T_0, T se déplace infiniment peu dans toutes les directions du plan, à chacun de ces déplacements correspond un centre instantané de la figure F : le lieu de ce centre instantané est une ligne droite; à deux déplacements perpendiculaires de T correspondent sur cette droite deux centres instantanés qui décrivent une involution. Ces deux centres sont dits conjugués.

Pour un déplacement dt de T la figure tourne autour de son centre instantané d'un angle $d\varphi$, $\frac{d\varphi}{dt}$ est la vitesse angulaire de la figure; à deux déplacements rectangulaires de T correspondent deux vitesses angulaires ω et ω' telles qu'on a $\omega^2 + \omega'^2 = \text{const.}$

9. — Soit encore une figure F, de forme fixe, se déplaçant sur une sphère, ce mouvement dépendant des coordonnées α et β du point T mobile dans un plan.

Considérons les divers déplacements infiniment petits de T à partir de T_0 dans les diverses directions de son plan.

A chacun de ces déplacements de T correspond une rotation instantanée de F, autour d'un axe passant par le centre de la sphère; le lieu de ces axes, pour tous ces déplacements de T, est un plan. Si l'on porte, sur chaque axe, à partir du centre de la sphère, la vitesse de rotation instantanée de la figure, ces vitesses sont les rayons d'une ellipse : à deux déplacements rectangulaires de T correspondent, dans cette ellipse, des rayons conjugués.

10. — Nous nous bornerons à ce résumé très succinct qui suffit pour faire comprendre l'idée directrice de cette Cinématique à deux et à trois dimensions.

On trouvera, dans notre Mémoire, la théorie détaillée des divers mouvements dont nous venons de parler et plusieurs autres théories importantes : composition des mouvements et des vitesses; la composition des ellipses et des ellipsoïdes homographiques; mouvement, à deux et à trois dimensions, des figures dans l'espace, etc.

En somme, cette Cinématique générale est une extension géométrique de la Cinématique matérielle, le temps devenant une grandeur à deux ou à trois dimensions, c'est-à-dire une grandeur représentée par les coordonnées d'un point T dans un plan ou dans l'espace.

QUESTION 90

Solution par M. E. Fesquet, élève au Lycée de Nîmes.

Construire le lieu des pieds des normales menées d'un point fixe S, *à la suite des circonférences qui touchent deux droites fixes données. — Examiner 1° le cas particulier où le point fixe* S *est sur l'une des deux droites données; 2° le cas où le point* S *est également distant des deux droites données; 3° le cas où le point* S *se transporte à l'infini, dans une direction donnée.*

Faisons d'abord quelques remarques géométriques sur le degré et les principales propriétés du lieu.

Il y a deux espèces de cercles touchant les deux droites données: les cercles ayant leurs centres sur la bissectrice Ox' (*fig. 1*), et les cercles ayant leurs centres sur Oy', seconde bissectrice. On peut prévoir qu'à chaque espèce de cercles correspondra un lieu, car les équations des deux espèces de cercles sont séparées. Il suffit donc d'examiner l'un des lieux; par exemple, celui qui correspond aux cercles ayant leurs centres sur Ox'. Nous allons étudier les particularités de ce lieu en considérant ses points de rencontre avec une série de droites passant par S.

1° Toutes les droites, issues de S, donnent deux points du lieu. — En effet, soit SC une de ces droites (*fig. 1*). Elle rencontre la bissectrice Ox' en un point C; si, de ce point C comme centre, on décrit un cercle tangent aux deux droites DO et D'O, ce cercle coupe CS en deux points M et M', qui sont deux points du lieu.

On voit, d'après cela, que Ox' est le lieu des milieux des cordes issues de S, dans la courbe proposée.

2° Le point O est un point double. — En effet, considérons le cercle évanouissant, de centre O. Il est bien tangent aux deux droites OD et OD' et il donne, dans le lieu, les deux points confondus O, O.

3° Le point S est un point double. — En effet, par S passent deux cercles de la famille considérée; S est donc un point double; les tangentes en ce point sont les normales aux deux cercles du point S.

Si les deux cercles passant en S sont imaginaires, c'est-à-dire si le point S n'est pas dans l'angle qui contient la bissectrice Ox', S est un point isolé.

Chaque droite, issue de S, coupe donc le lieu en quatre points, les points M et M' et le point double S. Le lieu est donc du quatrième degré.

4° Direction asymptotique. — Les points M et M' ne seront rejetés à l'infini, que si le point C lui-même est rejeté à l'infini, c'est-à-dire si SC est parallèle à Ox'. Ox' est donc une direction asymptotique; c'est, de plus, une direction asymptotique double; car SC tournant autour de S, devient deux fois parallèle à Ox'.

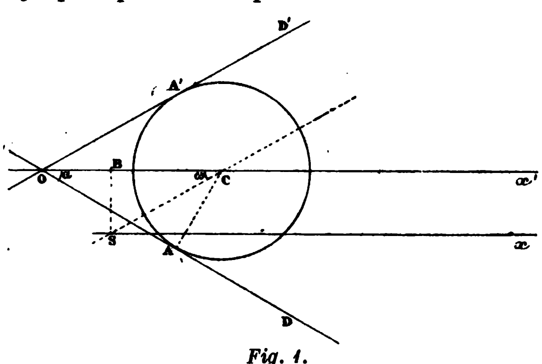


Fig. 1.

En résumé, le lieu est une courbe du quatrième ordre ayant deux points doubles O et S (le point S pouvant être un point isolé), et deux asymptotes parallèles à Ox'.

La marche de la discussion géométrique précédente nous montre déjà l'avantage que nous aurons à chercher l'équation du lieu en coordonnées polaires ayant pour pôle le point S et pour axe polaire Sx, parallèle à Ox'.

Soient : $OB = a$, $BS = b$, $DOC = \alpha$. Soit encore $CSx = \omega$. Le triangle rectangle SBC donne :

$$SC = \frac{b}{\sin \omega}.$$

On a : $$CM = CM' = CA = OC \sin \alpha.$$

Or : $$OC = OB + BC = a + b \cot \omega = \frac{a \sin \omega + b \cos \omega}{\sin \omega}.$$

L'équation polaire du lieu est donc :

$$= \frac{b \pm (a \sin \omega + b \cos \omega) \sin \alpha}{\sin \omega};$$

ou, en cordonnées rectilignes :

(1) $(y - b)^2(x^2 + y^2) = (ay + bx)^2 \sin^2 \alpha.$

On vérifie ainsi que le lieu est bien du quatrième degré ; que l'origine S est un point double, ainsi que le point O $(-a, b)$ et que Sx est une direction asymptotique double.

Les tangentes au point double, à l'origine, ont pour équation :

$$b^2(x^2 + y^2) - (ay + bx)^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

ou : $$b^2x^2 \cos^2 \alpha - 2abxy \sin^2 \alpha + (b^2 - a^2 \sin^2 \alpha)y^2 = 0.$$

Pour que ces tangentes soient réelles, on doit avoir :

$$a^2 \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha(b^2 - a^2 \sin^2 \alpha) > 0,$$

ou $$a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha > 0.$$

C'est-à-dire que le point S doit être situé dans l'angle DOD' ou dans l'angle opposé par le sommet. De là, divers cas à considérer.

Les équations des asymptotes sont :

$$(y - b) = \pm b \sin \alpha.$$

Pour construire la courbe, ordonnons l'équation (1) par rapport à x,

(2) $$\{ (y - b)^2 - b^2 \sin^2 \alpha \} x^2 - 2abxy \sin^2 \alpha + y^2 \{ (y - b)^2 - a^2 \sin^2 \alpha \} = 0.$$

Pour que cette équation ait ses racines réelles, on doit avoir :

$$a^2b^2y^2 \sin^4 \alpha - y^2 \{ (y - b)^2 - b^2 \sin^2 \alpha \} \{ (y - b)^2 - a^2 \sin^2 \alpha \} > 0$$

ou $$(y - b)^2 - (a^2 + b^2) \sin^2 \alpha > 0.$$

y ne peut donc varier que de

$$b - \sin \alpha \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{à} \quad b + \sin \alpha \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$b - \sin \alpha \sqrt{a^2 + b^2}$ est positif ou négatif suivant que

$$a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha$$

est inférieur ou supérieur à zéro.

Considérons la somme S et le produit P des racines l'équation (2). On a :

$$S = \frac{2aby \sin^2 \alpha}{\{ y - b(1 + \sin \alpha) \} \{ y - b(1 - \sin \alpha) \}},$$

$$P = \frac{y^2 \{ y - b - a \sin \alpha)(y - b + a \sin \alpha) \}}{\{ y - b(1 + \sin \alpha \} \{ y - b(1 - \sin \alpha) \}}.$$

En considérant les signes de la somme et du produit pour les valeurs de y comprises entre

$$b - \sin \alpha \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } q + \sin \alpha \sqrt{a^2 + b^2},$$

on construit facilement la courbe, d'une façon très régulière.

Trois cas sont à distinguer :

1° $a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha > o.$

Les tangentes au point S sont réelles.

1° $b^2 - a^2 \sin^2 \alpha = o.$

Les tangentes à l'origine sont toutes deux dans l'angle ySx. Il est facile de voir que la courbe a la forme que nous lui avons donnée dans la *fig. 2*.

Les points E et F sont entre G et H, ou en dehors de GH, suivant que a est inférieur ou supérieur à b.

On peut voir, facilement, que les points S, R, T, ainsi que S, P, Q sont en ligne droite.

2° $b^2 - a^2 \sin^2 \alpha = o.$

L'une des tangentes à l'origine est Sy, mais la courbe conserve la même forme.

3° $b^2 - a^2 \sin^2 \alpha < o.$

Les deux tangentes en S sont situées de part et d'autre de Sx, et le point F est au-dessous de S. La forme générale de la courbe est encore la même.

2° $a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha = o.$

Les tangentes à l'origine sont confondues; le point S est un point de rebroussement et la tangente en ce point a pour

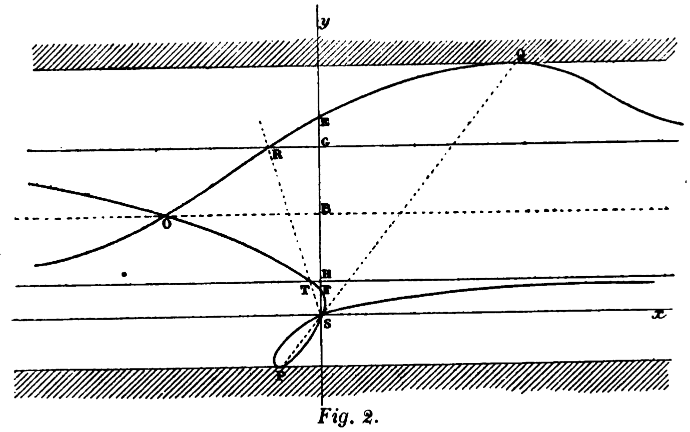


Fig. 2.

équation : $bx - ay = o$; y ne peut varier que de o à $2b$. La courbe a la forme donnée par la *fig. 3*.

Dans ce cas, le point S est sur l'une des droites DO, D'O.

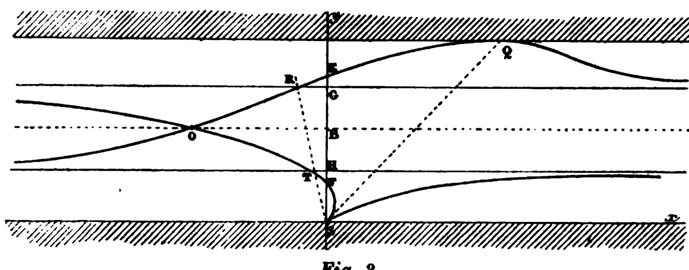


Fig. 3.

3. $a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha < 0.$

Les tangentes en S sont imaginaires; de plus $b - \sin \alpha \sqrt{a^2 + b^2}$ est positif. La courbe présente alors la forme de la *fig. 4*.

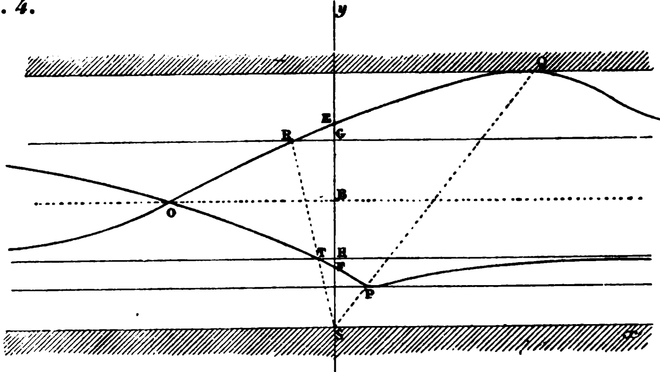


Fig. 4.

Remarque. — La droite OB, dont l'équation est $y = b$, est à égale distance des deux asymptotes et des tangentes parallèles à l'axe des x.

Si $a = 0$, le point O est sur Sy, et la courbe est symétrique par rapport à Sy.

Cas particuliers. — 1° Le point S est situé sur la bissectrice. On a alors $b = 0$; l'équation du lieu se réduit à :

$$y^2(x^2 + y^2) = a^2y^2 \sin^2 \alpha,$$

ou $$y^2 = 0 \quad \text{(deux fois l'axe des } x)$$

et $$x^2 + y^2 - a^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

cercle ayant pour centre le point S et inscrit à l'angle DOD', résultat évident *a priori*.

2° Le point S est mobile dans une direction donnée. — Transportons l'origine au point O (a, b) ; l'équation du lieu devient :

$$y^2\{(x - a)^2 + (y + b)^2\} - (ay + bx)^2 \sin^2 \alpha = 0.$$

Divisons tous les termes de cette équation par a^2, en faisant a infini et $\frac{b}{-a} = m$; il reste :

$$(1 + m^2)y^2 - (y - mx)^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

équation de deux droites passant par O. Ces deux droites sont toujours réelles. Des considérations géométriques rendent évident ce résultat. En effet *(fig. 5)*, les triangles semblables, OCA, OC'A' donnent $\frac{\text{OC}}{\text{OC}'} = \frac{\text{CA}}{\text{C}'\text{A}'} = \frac{\text{CM}}{\text{C}'\text{M}'}$; par suite, O, M, M' sont trois points en ligne droite.

3° Supposons enfin que, le point S restant fixe, le point O s'éloigne à l'infini, dans la direction de Ox' ; les deux droites OD et OD' deviennent parallèles et l'on trouve directement, pour l'équation du lieu :

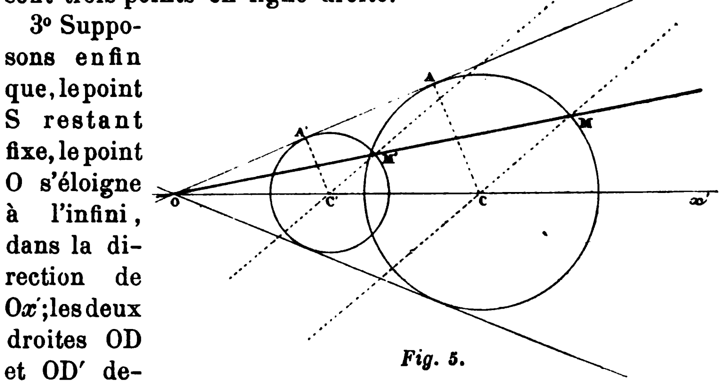


Fig. 5.

$$\rho = \frac{b}{\sin \omega} \pm \text{R},$$

ou :

$$(y - b)^2(x^2 - y^2) = \text{R}^2y^2.$$

Le lieu est du quatrième degré ; symétrique par rapport à Sy, et il a pour asymptote double la parallèle moyenne, représentée par $y = b$. Cette courbe est une conchoïde de Nicomède.

Remarque. — On peut observer que le lieu que nous venons de discuter est la projection de l'intersection d'un cône et d'un paraboloïde hyperbolique équilatère. Considérons en effet un cône ayant pour sommet un point (O,O') (Ox' étant la ligne de terre) et pour trace horizontale le cercle C ayant son centre sur Ox' *(fig. 6)*.

Considérons aussi le paraboloïde hyperbolique engendré par une droite s'appuyant sur les deux droites (Oc, $O'c$). (S, $s'o'$), et restant parallèle au plan horizontal.

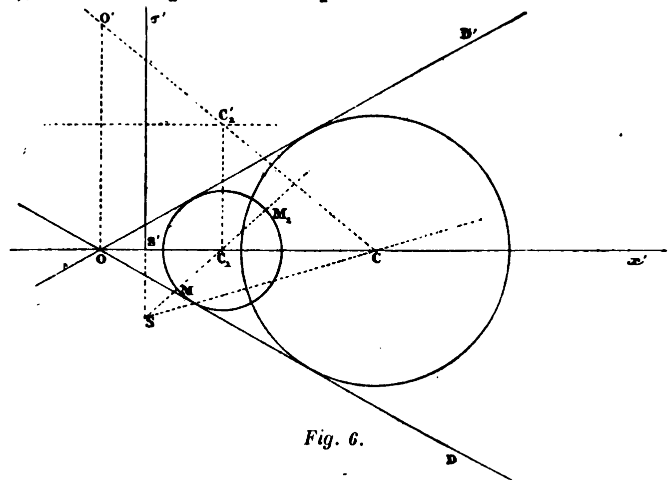


Fig. 6.

Pour trouver l'intersection de ce paraboloïde et du cône, nous pourrons employer des plans horizontaux auxiliaires. Ceux-ci couperont le cône suivant un cercle projeté horizontalement suivant le cercle C_1 tangent aux deux droites OD, OD' de contour apparent horizontal et le paraboloïde suivant une droite projetée en SC_1; car le plan horizontal est un plan directeur, et la droite d'intersection doit rencontrer les droites (Oc, $O'c$) (S, $s'o'$). Les points d'intersection de SC_1 et du cercle C_1 seront les projections horizontales de deux points de l'intersection des deux surfaces; on voit ainsi l'analogie complète entre la projection horizontale de cette intersection et le lieu précédemment cherché.

Cette remarque permet de construire géométriquement la tangente en un point quelconque du lieu. Cette construction est facile ; je ne m'y arrêterai pas.

Nota. — Autres solutions par M. Beaurepaire, élève au lycée Charlemagne (école Massillon) et Sequestre, à Angoulême.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 28128-12-9.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS